Дополнения

к книге «Элементарные методы символьных вычислений»

Введение

Программа ПифМат постоянно улучшается, в частности, благодаря разработке и применению новых методов и подходов к упрощению символьных выражений. Сведения об этих методах и будут составлять содержание предлагаемых «Дополнений».

Ссылки на книгу «Элементарные методы символьных вычислений» имеют вид (К. р.ф), где «р.» – номер раздела, а «ф» – номер формулы.

Файлы-примеры будут размещаться в архиве папки “Additions”. Правильное выполнение их гарантируется только при использовании последней версии (сборки) программы PifMath.

В приводимых ниже формулах, если не оговорено иное, буквами l, m, n обозначаются целые, буквами x, y – действительные, а буквами u, v, z, w – комплексные переменные или выражения.

1. Переход от логарифмов к обратным тригонометрическим и гиперболическим функциям

(Дополнения к разделу 3)

Все упрощения выражений, содержащих обратные тригонометрические и гиперболические функции, выполняются с помощью перехода к их логарифмическим представлениям (см., например, Examples/3/Inverse_direct.mtp). Обратный переход не приводит к фактическому упрощению, поскольку все обратные функции так или иначе вычисляются опять же с помощью их логарифмических представлений (непосредственно или через действительные и мнимые части), однако в некоторых случаях может улучшать эстетическое восприятие формул. Прежде всего, это касается ситуаций, когда комплексные логарифмические выражения превращаются в чисто действительные.

Рассмотрим в связи с этим один пример (см. файл Intgrl.mtp). При вычислении неопределенных интегралов от рациональных функций разложением на простейшие дроби к этим последним относят выражения вида $(x^2 + a^2)^{-1}$ и применяют «табличный интеграл»[1]

$$\int (x^2 + a^2)^{-1} dx = (1/a) \cdot \operatorname{arctg}(x/a). \qquad (1)$$

Однако при программировании вычисления неопределенных интегралов гораздо удобнее сводить такие подынтегральные функции к линейным по x знаменателям:

$$(x^2 + a^2)^{-1} = ((x - ia)^{-1} - (x + ia)^{-1})/(2ia)$$

и использовать формулу

$$\int z^{-1} dz = \ln(z).$$

Заметим, что обычно пишут $\int x^{-1} dx = \ln(|x|)$, чтобы избежать отрицательных аргументов, но эти формулы отличаются только при $x < 0$ и лишь константой $i\pi$. Итак,

$$\int (x^2 + a^2)^{-1} dx = (\ln(x - ia) - \ln(x + ia))/(2ia) \qquad (2)$$

Правые части (1) и (2) отличаются на константу, но, конечно, выражение (1) более привычно и выглядит гораздо симпатичнее.

В этом примере при преобразовании правой части (2) к правой части (1) можно допускать большие вольности, так как годятся любые выражения, отличающиеся на константу. В других случаях нужно строго придерживаться правил работы с комплексными логарифмами (К. 3). При этом оказывается, что преобразования к обратным тригонометрическим и гиперболическим функциям содержат подводные камни.

Арктангенс тригонометрический и гиперболический

По определению (К.3.34),

$$\operatorname{arctg}(z) = \frac{i}{2}(\ln(1 - iz) - \ln(1 + iz)).$$

Прежде чем получать обратное преобразование, необходимо слить логарифмы вместе. Как показано в (К. 3), это возможно, если

1) переменная z не принадлежит разрезу по положительной мнимой полуоси от $+i$ до $+i\infty$, тогда $\operatorname{arctg}(z) = \frac{i}{2}(\ln\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right));$
2) переменная z не принадлежит разрезу по отрицательной мнимой полуоси от $-i\infty$ до $-i$, тогда $\operatorname{arctg}(z) = \frac{1}{2i}(\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)).$

Если переменная $z = x$ действительна, то любое из приведенных условий, очевидно, выполнено. Мы ограничимся обсуждением первого случая (см.

[1] Для краткости мы не будем в правых частях формул для неопределенных интегралов писать «$+const$.

файл LnToArT.mtp). При комплексном z даже опция $Si+[1], не позволяет ПифМату слить логарифмы, поскольку для этого требуется более тонкий и весьма специфический анализ, не очень уместный в небольшой программе. Для действительных аргументов эта опция оказывается излишней, поскольку речь идет о делении двух выражений, принадлежащих к открытой правой комплексной полуплоскости $-\pi/2 < arg < \pi/2$ или $Re > 0$. Тем не менее, *преобразования логарифмов к обратным тригонометрическим и функциям в ПифМате разрешены только под опцией $Si+*. Положим теперь $u = \frac{1-iz}{1+iz}$, так что $z = \frac{-i(1-u)}{1+u}$ и [2]

$$\ln(u) = 2i \cdot \mathrm{arctg}(\frac{i(1-u)}{1+u}),$$

причем условие 1) приводит к требованию, чтобы значение u не было действительным и меньшим -1. Это обстоятельство служит оправданием только что сформулированному правилу применения опции $Si+.

Поскольку всегда $\mathrm{arctg}(iz) = i \cdot \mathrm{arth}(z)$ (К. 3.38), то

$$\ln(u) = 2 \cdot \mathrm{arth}(\frac{u-1}{u+1}),$$

а на величину u накладывается то же ограничение. При слиянии логарифмов для гиперболического арктангенса под опцией $Si+ предпочтительнее преобразование (К. 3.37)

$$\mathrm{arth}(z) = \frac{1}{2}(\ln(1+z) - \ln(1-z)) \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \ln(\frac{1-z}{1+z}),$$

поскольку при этом некорректный результат оказывается в отрицательной части действительной оси (на линии разреза $z = x < -1$).

В процессе упрощений необходимо сделать лишь одно преобразование – к тригонометрическому или гиперболическому арктангенсу, а затем выбрать из них наилучший вариант. Впрочем, такой выбор произойдет автоматически при нормализации выражения, поскольку преобразование (К. 3.38) разумно включить в процедуру автоматического упрощения.[3]

Арксинус тригонометрический и гиперболический

Логарифмическое определение тригонометрического арксинуса выглядит так (К. 3.43):

$$\arcsin(z) = -i \cdot \ln(\sqrt{1-z^2} + iz).$$

---

[1] Эта опция позволяет игнорировать различия, возникающие только на одномерном подмножестве комплексной плоскости.

[2] Из логарифмических представлений видно, что $\mathrm{arctg}(-z) = -\mathrm{arctg}(z)$ и $\mathrm{arth}(-z) = -\mathrm{arth}(z)$ для всех комплексных значений z.

[3] Об автоматическом упрощении см. (К. 4).

Если положить

$$u = \sqrt{1 - z^2} + iz, \qquad (3)$$

то обычным способом (возведением в квадрат) можно получить выражение для аргумента

$$z = \frac{i(1-u^2)}{2u} \qquad (4)$$

и, предположительно,

$$\ln(u) = i \cdot \arcsin(\frac{i(1-u^2)}{2u}). \qquad (5)$$

Однако из-за возведения в квадрат полученный корень надо проверить. Подставляя (4) в правую часть равенства (3), получаем (например, с помощью ПифМата, см. файл LnToArS.mtp):

$$u\ ?{=}?\ \frac{u^2(1+csgn((1+u^2)/u))-1+csgn((1+u^2)/u)}{2u}.$$

Ясно, что равенство справедливо, если $csgn\left(\frac{1+u^2}{u}\right) = 1$. Пусть $u = x + iy$, так что $\frac{1+u^2}{u} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + x + iy$. Мы видим, что требуемое условие выполнено, если либо $x > 0$, либо $x = 0$ и $y - 1/y > 0$ (т.е. $y \geq 1$ или $-1 \leq y < 0$ [1]).

Таким образом, область, где справедливо равенство (5), совпадает с правой комплексной полуплоскостью $-\frac{\pi}{2} < \arg(u) \leq \pi/2$, в которой интервал мнимой оси $(0, i)$ заменен интервалом $(-i, 0)$. Проверить такие условия программно вряд ли возможно,[2] но под опцией $Si+ можно забыть про указанную замену, хотя проверять принадлежность u к правой комплексной плоскости необходимо, как показывает следующий пример (см. !!! в том же файле). Возьмем функцию $\ln(u)$ с аргументом $u = -\sqrt{1-w^2} + iw$ и вычислим $\frac{i(1-u^2)}{2u} = w$. Полученное упрощение, однако, не означает, что получилось преобразование к арксинусу, поскольку выражение $-i \cdot \ln(u)$ его не представляет.

Причина описанных ограничений на аргумент логарифма u непосредственно связана с областью определения правой части равенства (3).

Проверка принадлежности сложного аргумента u правой полуплоскости чаще всего весьма затруднительна, обычно удается ее выполнить (и то лишь в некоторых случаях) только для действительной переменной $z = x$.

Поскольку всегда $\arcsin(iz) = i \cdot \operatorname{arsh}(z)$ (К. 3.45), то

$$\ln(u) = \operatorname{arsh}(\frac{u^2-1}{2u})$$

---

[1] Допустимость равенств $y = 1$ и $y = -1$ можно проверить непосредственно.

[2] В случае, когда значения арксинуса действительны, т.е. $z = x, |x| \leq 1$ значение $x = 0$ приводит к единственной точке $\arcsin(0) = 0$, и про все эти сложности можно забыть.

с теми же ограничениями на область значений выражения u.

Арккосинус тригонометрический и гиперболический

Логарифмическое представление тригонометрического арккосинуса имеет вид (К. 3.52)

$$\arccos(z) = -i \cdot \ln(z + i\sqrt{1 - z^2}).$$

Ясно, что при действительных значениях z таких, что и арккосинус действителен (переменная z действительна, $z = x, |x| \leq 1$), аргумент логарифма u принадлежит верхней комплексной полуплоскости $Im(u) > 0$ с двумя точками на действительной оси ($z = \pm 1$).

Необходимая замена находится так же, как и выше, так что

$$\ln(u) = i \cdot \arccos((1 + u^2)/(2u)). \qquad (6)$$

Подстановка найденной замены в логарифмическое представление приводит к следующему аргументу логарифма:[1]

$$z + i\sqrt{1 - z^2} = (1 + u^2 + (u^2 - 1)csgn(i \cdot (u^{-1} - u))/(2u).$$

Простой анализ аргумента сигнатуры показывает, что она обращается в единицу, если мнимая часть u положительна ($y = Im(u) > 0$) или равна нулю ($y = 0$), но тогда действительная часть ($x = Re(u)$) должна удовлетворять условию $x^{-1} - x \geq 0$, т.е. $0 < x \leq 1$ или $x \leq -1$. [2] В этих случаях справедливо преобразование (6).

В условиях программного анализа можно надеяться только на проверку условия $Im(u) > 0$ или на проверку действительности аргумента и значения получающегося арккосинуса (что, конечно, сужает область применимости (6)). Под опцией $Si+ ПифМат использует не совсем корректное условие $Im(u) \geq 0$, поскольку вероятность ошибки при достижении существенного упрощения выражения кажется весьма малой.

Обратимся теперь к гиперболическому арккосинусу (К 3.56):

$$\operatorname{arch}(z) = \ln(z + \sqrt{(z - 1)} \cdot \sqrt{(z + 1)}).$$

Действительные значения эта функция принимает при действительном аргументе $z \geq 1$. Замена переменной – такая же, как для тригонометрического арккосинуса. При этом

$$\ln(u) = \operatorname{arch}((1 + u^2)/(2u)). \qquad (7)$$

Контрольная подстановка приводит к аргументу логарифма вида

$$(u^2 + 1 + (u^2 - 1) \cdot csgn(u^{1/2} + u^{-1/2}) \cdot csgn(u^{1/2} - u^{-1/2}))/(2u).$$

---

[1] При подстановке используется преобразование (К 3.14) $\sqrt{-z^2} = \sqrt{(iz)^2} = iz \cdot csgn(iz)$.

[2] Равенство в последних неравенствах соответствует выбору сигнатуры $csgn_+(0) = 1$.

Преобразование (7) верно, если произведение сигнатур равно единице. Обозначим $x = Re(u)$ и $y = Im(u)$, так что $u = x + iy$.

Первая из сигнатур, очевидно, равна единице (ведь главная ветвь квадратного корня лежит в правой полуплоскости), если только *не* выполняется условия $y = 0$ и $-1 \le x \le 0$. В этом случае вторая сигнатура равна единице, так что произведение сигнатур есть минус единица. В других областях значение произведения сигнатур определяется значением второй сигнатуры, а именно, это произведение равно единице, если $|u| > 1$ или $|u| = 1$, но при этом $y \ge 0$. Поскольку проверка этих условий для сложных выражений весьма проблематична, преобразование (7) в ПифМате не используется.

2. Комплексная сигнатура обратных тригонометрических и гиперболических функций

В то время как комплексные сигнатуры прямых тригонометрических и гиперболических функций, вообще говоря, не упрощаются,[1] для обратных функций справедливы следующие формулы (если можно игнорировать значение при $z = 0$).

$$\mathrm{csgn}\big(\mathrm{arctg}(z)\big) = \mathrm{csgn}(z), \qquad (1)$$

$$\mathrm{csgn}\big(\mathrm{arth}(z)\big) = \mathrm{csgn}(z), \qquad (2)$$

$$\mathrm{csgn}\big(\arcsin(z)\big) = \mathrm{csgn}(z), \qquad (3)$$

$$\mathrm{csgn}\big(\mathrm{arsh}(z)\big) = \mathrm{csgn}(z), \qquad (4)$$

$$\mathrm{csgn}\big(\arccos(z)\big) = 1, \qquad (5)$$ [2]

$$\mathrm{csgn}\big(\mathrm{arch}(z)\big)=1. \qquad (6)$$ [3]

Обратимся к соотношению (1). Формулу (К. 3.39) для действительной части арктангенса можно переписать в виде

$$Re\big(\mathrm{arctg}(z)\big) = \frac{1}{2}\big((1 + ix - y)_{arg} - (1 - ix + y)_{arg}\big), \qquad (7)$$

где x и y – действительная и мнимая части комплексного выражения z. Ясно, что если $x \ne 0$, то знак действительной части арктангенса совпадает со знаком x. Если же $x = 0$, то при $|y| > 1$ действительная часть (7) равна

[1] Исключение составляет гиперболический тангенс. Если $z = x + iy$ (x и y действительные величины) и $x \ne 0$, то $\mathrm{csgn}\big(\mathrm{th}(x + iy)\big) = \mathrm{sgn}(x)$.

[2] Заметим, что $\arccos(1) = 0$. Это единственная такая точка, и выставленная по умолчанию опция $Pm+ в ПифМате позволяет ее игнорировать.

[3] Имея в виду, что arch(1)=0, см. предыдущую сноску.

$\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(y)$. Наконец, при $x = 0$ и $|y| \le 1$ удобно свести тригонометрический арктангенс к гиперболическому (см. К. 3.38):

$$\operatorname{arctg}(iy) = i \cdot \operatorname{arth}(y).$$

Поскольку арктангенс гиперболический в области $|y| \le 1$ действителен, то арктангенс тригонометрический не имеет действительной части, а его мнимая часть дается выражением (К. 3.40) с учетом равенства $x = 0$:

$$Im\big(\operatorname{arctg}(z)\big) = \frac{1}{4}\ln(\frac{(1+y)^2}{(1-y)^2}),$$

так что ее знак совпадает со знаком y. Тем самым соотношение (1) доказано.

Равенство (2) можно доказать аналогичными рассуждениями или используя формулу (К. 3.38).

Формула (К. 3.46)

$$\arcsin_{Re}(x + iy) = \arcsin(\frac{2x}{p(x,y)+q(x,y)}),$$

где

$$p(x,y) = \sqrt{(1+x)^2 + y^2},\ \ q(x,y) = \sqrt{(1-x)^2 + y^2},$$

показывает, что знак при $x \neq 0$ знак действительной части арксинуса совпадает со знаком x. Она обращается в ноль только при $x = 0$. Если при этом перейти к гиперболическому арксинусу (К. 3.45)

$$\arcsin(iy) = i \cdot \operatorname{arsh}(y),$$

то сразу становится ясно, что знаки мнимых частей арксинуса и его аргумента совпадают, что и доказывает формулу (3)

Формула (4) также сразу следует из (К. 3.49). Также легко доказываются соотношения (5) и (6) (с учетом сносок).

Преобразования (1) – (4) допускают некоторую модификацию. Поскольку согласно (К. 3.38)

$$\operatorname{arctg}(iz) = i \cdot \operatorname{arth}(z),\ \ \operatorname{arth}(iz) = i \cdot \operatorname{arctg}(z),$$

то, например,

$$\operatorname{csgn}\big(i \cdot \operatorname{arctg}(z)\big) = \operatorname{csgn}\big(\operatorname{arth}(iz)\big) = \operatorname{csgn}(iz).$$

Аналогично,

$$\operatorname{csgn}\big(i \cdot \operatorname{arth}(z)\big) = \operatorname{csgn}(i \cdot z), \qquad (8)$$

$$\operatorname{csgn}\big(i \cdot \arcsin(z)\big) = \operatorname{csgn}(i \cdot z),$$

$$\operatorname{csgn}\big(i \cdot \operatorname{arsh}(z)\big) = \operatorname{csgn}(i \cdot z).$$

Вместо мнимой единицы может стоять, конечно, любое чисто мнимое выражение с постоянным знаком, например, мнимое число.

3. Замечание об упрощениях

В книге подробно обсуждается вопрос о том, что следует считать более «простым» выражением в различных обстоятельствах. Приведем еще один пример:

$$100\ln(x) + \ln(|y|) = \ln(x^{100}y).$$

Возведение числа в сотую степень требует не более 8 умножений, выполняемых в процессоре, что обычно быстрее, чем вычисление второго логарифма. Однако при этом могут получаться очень большие числа, что во многих случаях нежелательно, поэтому ПифМат предпочитает левую часть приведенного равенства, если степень больше 7. А что проще «на взгляд»?