ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ХАЙЗЕНБЕРГА

Временное уравнение Шрёдингера для системы с взаимодействием имеет вид

$$i\partial_t \left| X(t) \right\rangle = H \left| X(t) \right\rangle$$

Представим функцию $\left| X(t) \right\rangle$ *в форме эволюционировавшего начального состояния системы с взаимодействием* $\left| X(t_0) \right\rangle$*, то есть*

$$\left| X(t) \right\rangle = U(t-t_0) \left| X(t_0) \right\rangle$$

$$U(t) = \exp(-iHt)$$

Тогда квантовомеханическое среднее некоторого оператора O *запишется так*

$$\langle O \rangle = \left\langle X(t_0) \middle| \breve{O} \middle| X(t_0) \right\rangle$$

$$\breve{O} = \exp\left(iH(t-t_0)\right) O \exp\left(-iH(t-t_0)\right)$$

Верно ли, что если в представлении Шрёдингера гамильтониан не зависит от времени, то в представлении Хайзенберга это качество не исчезает?

Чтобы отразить тот факт, что оператор записан в хайзенберговском представлении, мы снабдим его «рожками». Обратите внимание, что в представлении Хайзенберга операторы, как правило, зависят от времени, а функции состояния – не зависят. Если выясняется, что нечто эволюционирует, возникает естественное желание выписать соответствующее уравнение движения. Покажите, что операторы в представлении Хайзенберга эволюционируют согласно

$$\frac{d\breve{O}}{dt} = \left[\frac{\partial O(t)}{\partial t} \right]_H + i\left[\breve{H}, \breve{O} \right]$$

(индексом «H» мы снабдили выражение, над которым по техническим причинам не удалось поставить «рожки»). Дабы не загромождать формулы значками $t - t_0$ *, в дальнейшем полагаем* $t_0 = 0$*. Если в представлении Шрёдингера оператор явно от*

времени не зависит, то уравнение для его эволюции в представлении Хайзенберга упрощается

$$\frac{d\breve{O}}{dt} = i\left[\breve{H}, \breve{O}\right]$$

Покажите, что при переходе от Шрёдингера к Хайзенбергу соотношения коммутации и антикоммутации, в которых операторы взяты в один и тот же момент времени, сохраняют свою форму

$$[A, B] = C \Rightarrow \left[\breve{A}, \breve{B}\right] = \breve{C} \quad ; \quad \{A, B\} = C \Rightarrow \left\{\breve{A}, \breve{B}\right\} = \breve{C}$$

ОДНОЧАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ МНОГОФЕРМИОННОЙ СИСТЕМЫ

Пришло время познакомиться с функциями Грина истинно многочастичных систем (т.е. систем, в которых частиц мало того, что много, так они ещё и взаимодействуют). Начнём с 1-частичной функции Грина, которая привлекательна тем, что позволяет вычислять энергии квазичастиц, их времена жизни, распределение по импульсам, концентрацию и пр.

Наигравшись с определением 1-частичной функции Грина, перейдём к вопросу: «согласуется ли новое определение свободной 1-частичной гриновской функции согласуется с данным ранее её определением как решения дифура, в правой части которого – дельта-«функция»?» Получив утвердительный ответ, займёмся 1-частичной функции Грина, содержащей, на сей раз, эффекты взаимодействия, а именно, получим уравнение движения, которое является первым из бесконечной системы зацепляющихся уравнений, используемой в приближённых вычислениях функций Грина. В финале покажется ещё одна исключительно важная «буква теоретико-полевого алфавита» – 2-частичная функция Грина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Нам потребуются полевые операторы

$$\psi(\xi) = \sum_j \varphi_j(\xi) a_j$$

$$\psi^+(\xi) = \sum_j \varphi_j(\xi) a^+{}_j$$

Функции $\varphi_j(\xi)$ *– одноэлектронные или базисные функции, которые мы использовали при построении однодетерминантных волновых функций многоэлектронной системы,* $a^\dagger{}_j$ *и* a_j *– операторы рожденья и уничтоженья, относящиеся именно к этим функциям. Здесь мы используем шрёдингеровское представление, в котором операторы не зависят от времени. В представлении Хайзенберга операторы рожденья и уничтоженья имеют вид*

$$\breve{a}_j(t) = \exp(iHt) a_j \exp(-iHt)$$

$$\breve{a}_j^\dagger(t) = \exp(iHt) a_j^\dagger \exp(-iHt)$$

Здесь оператор H *– точный гамильтониан многочастичной системы с взаимодействием. Запишем полевые операторы в представлении Хайзенберга*

$$\breve{\psi}(\xi, t) = \exp(iHt)\psi(\xi)\exp(-iHt) = \sum_j \varphi_j(\xi)\breve{a}_j(t)$$

$$\breve{\psi}^\dagger(\xi, t) = \exp(iHt)\psi^\dagger(\xi)\exp(-iHt) = \sum_j \varphi_j(\xi)\breve{a}_j^\dagger(t)$$

Речь идёт о добавлении к ферми-системе «пробной частицы», таким образом, оператор Гамильтона не содержит переменной ξ, это обстоятельство и позволяет написать последнее равенство (т.е. поменять местами H и $\varphi_j\ \xi$ без всяких последствий). Все коммутационные соотношения, доказанные ранее для полевых операторов $\psi(\xi)$, $\psi^{\dagger}(\xi)$, остаются в силе и для $\breve{\psi}(\xi,t)$, $\breve{\psi}^{\dagger}(\xi,t)$, если их брать ***в один и тот же момент времени***

$$\{\breve{\psi}(\xi,t),\ \breve{\psi}(\xi',t)\}=\{\breve{\psi}^{\dagger}(\xi,t),\ \breve{\psi}^{\dagger}(\xi',t)\}=0 \quad ; \quad \{\breve{\psi}(\xi,t),\ \breve{\psi}^{\dagger}(\xi',t)\}=\delta(\xi-\xi')$$

Введём теперь хронологический оператор Вика, который упорядочивает стоящие в фигурных скобках операторы так, чтобы время уменьшалось слева направо, а в случае одинаковых t «кресты» стояли бы слева

$$T\{A(t)B(t')...\}=(-1)^p\,\sigma[A(t),B(t'),...]$$

где $\sigma[A(t_1),B(t_2),...]$ – перестановка, обеспечивающая требуемый порядок операторов, p – её чётность.

Примем следующее определение 1-частичной функции Грина для многофермионной системы

$$\boxed{\begin{aligned} &G(\xi t,\xi' t')\equiv -i\left\langle X_0\left|T\{\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^{\dagger}(\xi',t')\}\right|X_0\right\rangle=\\ &=\underbrace{-i\theta_{t-t'}\left\langle X_0\left|\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^{\dagger}(\xi',t')\right|X_0\right\rangle}_{\text{ЗАПАЗДЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА } G^{(r)}(\xi t,\xi' t')}+\underbrace{i\theta_{t'-t}\left\langle X_0\left|\breve{\psi}^{\dagger}(\xi',t')\breve{\psi}(\xi,t)\right|X_0\right\rangle}_{\text{ОПЕРЕЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА } G^{(a)}(\xi t,\xi' t')}\end{aligned}}$$

Здесь $|X_0\rangle$ обозначает основное состояние взаимодействующей многофермионной системы в представлении Хайзенберга. Вскоре убедимся, что введённое определение не противоречит тому, которым мы уже пользовались. При первом же взгляде на выражение для $G\ \xi t,\xi' t'$, сразу возникает идея: связать гриновскую функцию с оператором плотности фермионов в точке

$$\breve{\rho}(\xi,t)=\breve{\psi}^{\dagger}(\xi,t)\breve{\psi}(\xi,t)$$

точнее, с его квантовомеханическим средним по основному состоянию ферми-системы с взаимодействием

$$\boxed{\langle\breve{\rho}(\xi,t)\rangle=\left\langle X_0\left|\breve{\psi}^{\dagger}(\xi,t)\breve{\psi}(\xi,t)\right|X_0\right\rangle=-i\lim_{t'\to t_+}G(\xi t,\xi t')}$$

Рассмотрим оператор, равный сумме 1-частичных операторов

$$F=\sum_j f(\xi_j)$$

Записанный на языке чисел заполнения, он принимает облик

$$\breve{F}=\int\breve{\psi}^{+}(\xi,t)\,\breve{f}(\xi,t)\breve{\psi}(\xi,t)\,d\xi$$

(Если последний переход вызывает недоверие, полезно отследить, начиная с ЛЕКЦИИ 2, эволюцию вида оператора H_0

$$\sum_j h\ \xi_j\ \to\sum_{jl}\langle j|h|l\rangle a_j{}^{\dagger}a_l\to\int\psi^{\dagger}\ \xi\ h\ \xi\ \psi\ \xi\ d\xi\to\int\breve{\psi}^{\dagger}\ \xi,t\ \breve{h}\ \xi,t\ \breve{\psi}\ \xi,t\ d\xi$$

оставляющую его матричные элементы в первозданном виде).
Квантовомеханическое среднее по основному состоянию

$$\langle F\rangle=\left\langle X_0\left|\breve{F}\right|X_0\right\rangle=\left\langle X_0\left|\int\breve{\psi}^{\dagger}(\xi,t)\,\breve{f}(\xi,t)\breve{\psi}(\xi,t)\,d\xi\right|X_0\right\rangle$$

также выражается через 1-частичную функцию Грина

$$\boxed{\langle F\rangle = -i\int \lim_{\substack{\xi'\to\xi \\ t'\to t_+}} \breve{f}(\xi,t)G(\xi t,\xi' t')d\xi}$$

Приведите пример, демонстрирующий, что в записанном выше выражении нельзя просто взять и положить $\xi' = \xi$.

ЧЕМ ПРИМЕЧАТЕЛЕН СЛУЧАЙ НЕ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ ГАМИЛЬТОНИАНА?

Продемонстрируем (интуитивно понятное) ценное свойство: для системы с не зависящим от времени гамильтонианом гриновская функция $G(\xi t,\xi' t')$ зависит от разности времён $t-t'$, а не от t и t' по отдельности. Рассмотрим случай $t>t'$:

$$G(\xi t,\xi' t') = -i\left\langle X_0\left|\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right|X_0\right\rangle =$$

$$= -i\left\langle X_0\left|\exp(iHt)\psi(\xi)\exp(-iHt)\exp(iHt')\psi^\dagger(\xi')\exp(-iHt')\right|X_0\right\rangle =$$

используем, что гамильтониан от времени не зависит

$$= -i\left\langle X_0\left|\exp(iHt)\psi(\xi)\exp\left[-iH(t-t')\right]\psi^\dagger(\xi')\exp(-iHt')\right|X_0\right\rangle$$

Учитывая, что энергия основного состояния $\widehat{E}_0$ (чтобы факт, что рассматривается система с взаимодействием, не забылся, снабдим энергию шапочкой) есть собственное значение оператора Гамильтона H:

$$H|X_0\rangle = \widehat{E}_0|X_0\rangle$$

с неизбежностью приходим к

$$G(\xi t,\xi' t') = -i\left\langle X_0\left|\exp\left[i\widehat{E}_0(t-t')\right]\psi(\xi)\exp\left[-iH(t-t')\right]\psi^\dagger(\xi')\right|X_0\right\rangle =$$

$$= -i\left\langle X_0\left|\exp\left[iH(t-t')\right]\psi(\xi)\exp\left[-iH(t-t')\right]\psi^\dagger(\xi')\right|X_0\right\rangle =$$

$$= -i\left\langle X_0\left|\breve{\psi}(\xi,t-t')\breve{\psi}^\dagger(\xi',0)\right|X_0\right\rangle$$

Докажите аналогичное утверждение для случая $t<t'$

$$G(\xi t,\xi' t') = +i\left\langle X_0\left|\breve{\psi}^\dagger(\xi',0)\breve{\psi}(\xi,t-t')\right|X_0\right\rangle$$

Суммируя сказанное, приходим к выводу, что если гамильтониан не зависит от времени, то в определение функции Грина полезно с самого начала вшить зависимость от разности времён

$$\boxed{G(\xi t,\xi' t') = -i\left\langle X_0\left|T\left\{\breve{\psi}(\xi,t-t')\breve{\psi}^\dagger(\xi',0)\right\}\right|X_0\right\rangle = G(\xi,t-t',\xi',0)}$$

Перепишем определение 1-частичной функции в форме

$$G(\xi t,\xi' t') = -i\left\langle X_0\left|T\left\{\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right\}\right|X_0\right\rangle =$$

$$= -i\sum_{kk'}\left\langle X_0\left|T\left\{\breve{a}_k(t)\breve{a}_{k'}^\dagger(t')\right\}\right|X_0\right\rangle\varphi_k(\xi)\varphi_{k'}^*(\xi') =$$

$$= \sum_{kk'}G(kt,k't')\varphi_k(\xi)\varphi_{k'}^*(\xi')$$

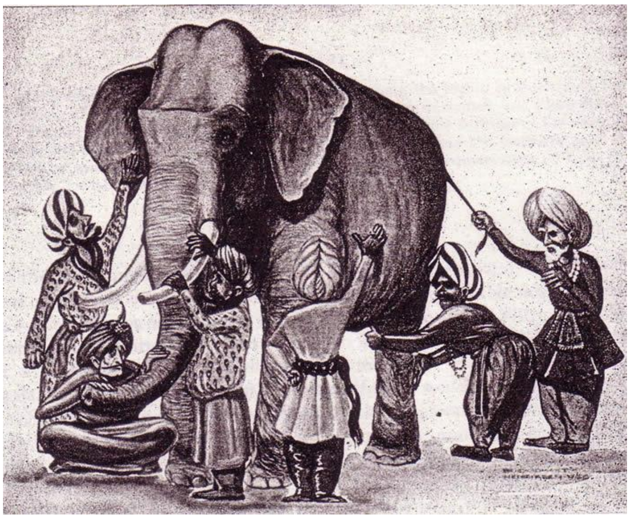
Если гамильтониан не зависит от времени, то можно написать, что функция Грина (закрепилась традиция называть $G(kt,k't')$ тем же именем, что и $G(\xi t,\xi' t')$) зависит только от разности времён

$$G(kt,k't') = -i\left\langle X_0\left|T\left\{\breve{a}_k(t-t')\breve{a}_{k'}^\dagger(0)\right\}\right|X_0\right\rangle$$

или короче

$$G(k,k',t) = -i\left\langle X_0 \left| T\left\{\breve{a}_k(t)\breve{a}^\dagger_{k'}(0)\right\}\right| X_0 \right\rangle$$

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Рассмотрим случай $t > 0$:

$$G(k,k',t) = -i\left\langle X_0 \left| \breve{a}_k(t)\breve{a}_{k'}{}^\dagger(0)\right| X_0 \right\rangle$$

Присмотревшись к этой записи, можно узнать в 1-частичной функции Грина амплитуду вероятности того, что если в момент времени $t = 0$ к системе с взаимодействием, находящейся в основном состоянии $\left|X_0\right\rangle$, добавить одну частицу с импульсом k' (приходим к состоянию $\breve{a}_{k'}{}^\dagger(0)\left|X_0\right\rangle$), то в момент времени $t > 0$ система будет находиться в основном состоянии с добавленной частицей с импульсом k.

*И правда: в момент времени $t_0 = 0$ система находится в состоянии $\breve{a}_{k'}{}^\dagger(0)\left|X_0\right\rangle$. Обратите внимание, что это уже состояние $N+1$-электронной системы, которое получается из основного состояния N-электронной системы $\left|X_0\right\rangle$ путём добавления к нему одного электрона. За время t состояние $\breve{a}_{k'}{}^\dagger(0)\left|X_0\right\rangle$ эволюционирует в состояние $\exp(-iHt)\breve{a}_{k'}{}^\dagger(0)\left|X_0\right\rangle$, и амплитуда вероятности того, что это конечное состояние совпадает с состоянием $a_k{}^\dagger\exp(-iHt)\left|X_0\right\rangle$ – есть просто проекция одного состояния на другое, т.е. с точностью до декоративного множителя i имеем $G(k,k',t) = -i\left\langle X_0 \left| \breve{a}_k(t)\breve{a}_{k'}{}^\dagger(0)\right| X_0 \right\rangle$. В связи с такой интерпретацией 1-частичной функции Грина часто говорят **о «распространении частицы» в системе из состояния с импульсом k' в состояние с импульсом k**. При этом следует понимать, что это просто фигура речи, поскольку в системе тождественных частиц не имеет смысла думать о том, что «частица, о которой мы рассуждаем в конечный момент времени, – это та же самая частица, что и в начальный момент времени».*

*Если же эти состояния совпадают $k = k'$, то говорят, что частица **распространяется только во времени**, 1-частичную функцию Грина записывают в виде*

$$G(k,k,t) = -i\left\langle X_0 \left| \breve{a}_k(t)\breve{a}_k{}^\dagger(0)\right| X_0 \right\rangle \equiv G(k,t).$$

Интерпретация $G(r,r',t)$ аналогична интерпретации $G(k,k',t)$. Случай $t<0$ отличается от случая $t>0$ только тем, что на сей раз в систему добавляется дырка (т.е. изымается электрон).

Проиллюстрируем определения с помощью

<u>СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОНОВ, НЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ДРУГ С ДРУГОМ</u>

Если взаимодействие между электронами отсутствует, то основное состояние описывается вектором состояния $\left|\Phi_0\right\rangle$ (одноэлектронные состояния из сферы Ферми заполнены, а вне неё – свободны). Числа заполнения N_k состояний k таковы

$$N_k=\begin{cases}1, & k\le k_F\\ 0, & k>k_F\end{cases}$$

Функция Грина рассматриваемой системы

$$G_0(k,t)=-i\left\langle\Phi_0\left|T\left\{\breve{a}_k(t)\breve{a}_k^\dagger(0)\right\}\right|\Phi_0\right\rangle$$

Полный гамильтониан равен H_0, так что

$$\breve{a}_k(t)=\exp(iH_0t)a_k\exp(-iH_0t)$$

В случае $t>0$ имеем

$$G_0(k,t)=-i\left\langle\Phi_0\left|\breve{a}_k(t)\breve{a}_k^\dagger(0)\right|\Phi_0\right\rangle=-i\left\langle\Phi_0\left|\exp(iH_0t)a_k\exp(-iH_0t)a^\dagger{}_k\right|\Phi_0\right\rangle=$$

$$=-i\exp(iE_0t)\left\langle\Phi_0\left|a_k\exp(-iH_0t)a^\dagger{}_k\right|\Phi_0\right\rangle\boxed{=}$$

Так как $H_0a^\dagger{}_k\left|\Phi_0\right\rangle=(E_0+\varepsilon_k)a^\dagger{}_k\left|\Phi_0\right\rangle\Rightarrow\exp(-iH_0t)a^\dagger{}_k\left|\Phi_0\right\rangle=\exp\left[-i(E_0+\varepsilon_k)t\right]a^\dagger{}_k\left|\Phi_0\right\rangle$

$$\boxed{=}-i\exp(-i\varepsilon_kt)(1-N_k)$$

Аналогичным образом, для случая $t<0$ покажите, что

$$G_0(k,t)=\ i\exp(-i\varepsilon_kt)N_k$$

Сливая оба результата в одну функцию Грина, приходим к соотношению

$$\boxed{G_0(k,t)=i\left[\theta_t(N_k-1)+\theta_{-t}N_k\right]\exp(-i\varepsilon_kt)}$$

Воспользовавшись $\partial_t\theta_t=\delta(t)$; $\delta(t)f(t)=\delta(t)f(0)$; $\varepsilon_k=\dfrac{k^2}{2m}$, *получите уже известный (см. в конце СЕМИНАРА 1) результат*

$$\boxed{\left(i\partial_t-\frac{k^2}{2m}\right)G_0(k,t)=\delta(t)}$$

Рассмотрим теперь временной Фурье-образ функции $G_0(k,t)$:

$$G_0(k\le k_F,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\exp(i\varepsilon t)G_0(k\le k_F,t)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\exp(i\varepsilon t)i\theta_{-t}\exp(-i\varepsilon_kt)=\frac{i}{i(\varepsilon-\varepsilon_k)}\exp\left[i(\varepsilon-\varepsilon_k)t\right]\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$G_0(k>k_F,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\exp(i\varepsilon t)G_0(k>k_F,t)=$$

$$=-i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\exp(i\varepsilon t)\theta_t\exp(-i\varepsilon_kt)=\frac{-i}{i(\varepsilon-\varepsilon_k)}\exp\left[i(\varepsilon-\varepsilon_k)t\right]\Big|_{0}^{+\infty}$$

Результаты осциллируют на $\pm\infty$, *что создаёт ощущение дискомфорта, устраняемое введением в подынтегральное выражение множителя*

$$\exp(-\eta_k t) \qquad \begin{cases} \eta_k \to 0_+ & k > k_F \\ \eta_k \to 0_- & k \le k_F \end{cases}$$

В итоге имеем

$$\boxed{G_0(k,\varepsilon) = \lim_{\eta_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_k + i\eta_k}}$$

Обратите внимание, что вещественная часть полюса гриновской функции оказывается равна энергии добавленного в систему элементарного возбуждения в состоянии k.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ 1-ЧАСТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Стартуем с определения 1-частичной функции Грина для многофермионной системы

$$G(\xi t, \xi' t') = -i\left\langle X_0 \left| T\left\{\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right\}\right| X_0 \right\rangle$$

Сейчас нам из него понадобится вот что

$$T\left\{\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right\} = \theta_{t-t'}\ \breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t') - \theta_{t'-t}\ \breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\breve{\psi}(\xi,t)$$

Чтоб получить дифур, описывающий эволюцию во времени, продифференцируем по времени и посмотрим, куда нас это заведёт

$$\frac{\partial}{\partial t} T\left\{\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right\} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial\theta_{t-t'}}{\partial t}\ \breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t') + \theta_{t-t'}\ \dfrac{\partial\breve{\psi}(\xi,t)}{\partial t}\breve{\psi}^\dagger(\xi',t') - \\ -\dfrac{\partial\theta_{t'-t}}{\partial t}\ \breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\breve{\psi}(\xi,t) - \theta_{t'-t}\ \breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\dfrac{\partial\breve{\psi}(\xi,t)}{\partial t} \end{array}\right] =$$

$$= \delta(t-t')\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t') + \delta(t'-t)\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\breve{\psi}(\xi,t) + T\left\{\frac{\partial\breve{\psi}(\xi,t)}{\partial t}\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right\} =$$

$$= \delta(t-t')\left\{\breve{\psi}(\xi,t),\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right\} + T\left\{\frac{\partial\breve{\psi}(\xi,t)}{\partial t}\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right\} =$$

$$= \delta(t-t')\delta(\xi-\xi') + T\left\{i\left[H,\breve{\psi}(\xi,t)\right]\breve{\psi}^\dagger(\xi',t')\right\}$$

Полагая

$$H = H_0 + H_I =$$

$$= -\int d\xi\ \breve{\psi}^\dagger(\xi,t)\frac{1}{2m}\nabla^2\breve{\psi}(\xi,t) + \frac{1}{2}\int\int d\xi_1 d\xi_2\ \breve{\psi}^\dagger(\xi_1,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi_2,t)u(\xi_1,\xi_2)\breve{\psi}(\xi_2,t)\breve{\psi}(\xi_1,t)$$

находим, что

$$\left[H_0,\breve{\psi}(\xi,t)\right] = -\frac{1}{2m}\int d\xi''\ \left[\breve{\psi}^\dagger(\xi'',t)\nabla''^2\breve{\psi}(\xi'',t),\breve{\psi}(\xi,t)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2m}\int d\xi''\left(\breve{\psi}^\dagger(\xi'',t)\nabla''^2\underbrace{\breve{\psi}(\xi'',t)\breve{\psi}(\xi,t)}_{-\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}(\xi'',t)} - \breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}^\dagger(\xi'',t)\nabla''^2\breve{\psi}(\xi'',t)\right) =$$

$$= +\frac{1}{2m}\int d\xi''\left\{\breve{\psi}^\dagger(\xi'',t),\breve{\psi}(\xi,t)\right\}\nabla''^2\breve{\psi}(\xi'',t) = \frac{1}{2m}\int d\xi''\ \delta(\xi-\xi'')\nabla''^2\breve{\psi}(\xi'',t) =$$

$$= \frac{1}{2m}\nabla^2\breve{\psi}(\xi,t)$$

Подобным образом, предполагая симметрию $u(\xi'',\xi) = u(\xi,\xi'')$, *покажите*

$$\left[H_I,\breve{\psi}(\xi,t)\right]=\int d\xi''\, u(\xi'',\xi)\breve{\psi}^\dagger(\xi'',t)\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}(\xi'',t)$$

Наконец-таки можно записать дифур для 1-частичной гриновской функции

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\left\langle X_0\left|T\left\{\psi(\xi,t)\psi^\dagger(\xi',t')\right\}\right|X_0\right\rangle=$$
$$=-i\delta(t-t')\delta(\xi-\xi')-ii\frac{1}{2m}\left\langle X_0\left|T\left\{\nabla^2\breve{\psi}(\xi,t)\psi^\dagger(\xi',t')\right\}\right|X_0\right\rangle-$$
$$-ii\left\langle X_0\left|\int d\xi''\, u(\xi'',\xi)T\left\{\breve{\psi}^\dagger(\xi'',t)\breve{\psi}(\xi,t)\breve{\psi}(\xi'',t)\psi^\dagger(\xi',t')\right\}\right|X_0\right\rangle$$

Обкладки из $\left|X_0\right\rangle$ *можно внести под знак интеграла, поскольку исследуемая система не содержит* ξ' *(помните – эта переменная относится к «пробной» частице). Преобразуем, перепишем, теперь у нас в руках интегро-дифференциальное уравнение эволюции 1-частичной функции Грина*

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\nabla^2\right]G(\xi t,\xi' t')=\delta(t-t')\delta(\xi-\xi')\\&\qquad-i\int d\xi''\, u(\xi'',\xi)\left\langle X_0\left|T\left\{\breve{\psi}^\dagger(\xi'',t)\breve{\psi}(\xi'',t)\breve{\psi}(\xi,t)\psi^\dagger(\xi',t')\right\}\right|X_0\right\rangle\end{aligned}}$$

Если взаимодействие между электронами не учитывается, то слагаемое с 2-частичной функцией Грина пропадает и, как и следовало ожидать, получается уравнение на свободную 1-частичную функцию Грина. Следует обратить внимание на новый любопытный объект, описывающий «распространение» двух элементарных возбуждений с учётом их корреляционных взаимодействий как с системой, так и друг с другом. Выражению

$$K(\xi_1 t_1,\xi_2 t_2;\xi_{1'} t_{1'},\xi_{2'} t_{2'})=-i\left\langle X_0\left|T\left\{\breve{\psi}(\xi_1,t_1)\breve{\psi}(\xi_2,t_2)\breve{\psi}^\dagger(\xi_{1'},t_{1'})\psi^\dagger(\xi_{2'},t_{2'})\right\}\right|X_0\right\rangle\equiv K(1,2;1',2')$$

дадим имя 2-частичной (или парной) функцией Грина.

Убедитесь, что новая знакомая обладает следующими свойствами симметрии

$$K(1,2;1',2')=-K(2,1;1',2')=-K(1,2;2',1')$$

2-частичную функцию Грина тоже можно продифференцировать по времени и получить интегро-дифференциальное уравнение, которое содержит наряду с одночастичной функцией Грина трёхчастичную. Поступая в том же духе с трёхчастичной и прочими многочастичными функциями Грина, можно начать выписывать систему зацепляющихся уравнений, оборвать её на некотором шаге, попытаться продвинуться насколько можно (или нужно).