Ветрова М.А., Котова Д.А., Мелихов Г.М., Никифоров А.М.

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Москва 2015

Далее представлены записи лекций по курсу общей физики (кроме оптики), прочитанных в 2015 году Никифоровым А.М. студентам кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, знакомящимся с физикой в течение четвертого и пятого семестров.

Благодаря слушателям — Ветровой М.А., Котовой Д.А. и Мелихову Г.М. — появился этот печатный вариант.

Содержание

1. Кинематика.

1.1. Первые определения

Для начала дадим несколько важных определений.

Определение 1.1. Кинематика — раздел физики, описывающий движение тел или частей тела, не рассматривая причин, вызывающих изменения состояния движения.

Определение 1.2. Механическое движение — изменение положения тел или частей тел относительно друг друга с течением времени.

Определение 1.3. Движением в $\mathbb{R}^3$, где $\mathbb{R}^3$ — трехмерное евклидово пространство, назовем дифференцируемое отображение $\vec{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Определение 1.4. Материальная точка — тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

К определению (1.4) для большей ясности приведем два примера.

1. Самолет движется из Парижа в Стамбул с заданной скоростью $\vec{v}(t)$. Во сколько Вы приземлитесь, если вылетели во столько-то? Здесь мы не усложняем задачу и рассматриваем самолет как материальную точку.

2. Исследуются аэродинамические характеристики и ставится вопрос о мягкости посадки. В таком случае уже нельзя рассматривать самолет как какую-то там материальную точку — иначе переупростим и не ухватим существа задачи.

Почему нужно дружить с механикой материальной точки? Потому что произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые макрочасти, взаимодействующие между собой. Далее, каждую из таких частей можно принять за материальную точку и свести задачу об изучении движения произвольной системы тел к задаче об изучении системы взаимодействующих материальных точек.

Из курса теоретической механики Вам уже известно, что

Определение 1.5. Абсолютно твердое тело (АТТ) — такая система материальных точек, для которой расстояние между любыми точками постоянно во времени.

Определение 1.6. Поступательное движение абсолютно твердого тела — такое движение, при котором все точки тела движутся по одинаковым траекториям, при этом любой отрезок прямой, соединяющий две точки тела, перемещается параллельно самому себе.

То есть, исследуя движение лишь одной материальной точки, Вы можете совершенно «бесплатно» узнать, как движется любая точка при поступательном движении АТТ.

Определение 1.7. Траектория — кривая, описываемая концом радиус-вектора некоторой материальной точки при ее движении.

Обратите внимание, что, тем самым, траектория тела привязана к самой системе отсчета (СО).

Определение 1.8. Система отсчета — тело отсчета вместе с неподвижным относительно него инструментом (линейками, часами).

Рассмотрим такой пример. Вы роняете в поезде монетку. Она приземляется на пол. По какой траектории она двигалась? До тех пор, пока не указана система отсчета, в которой Вы работаете, вопрос нельзя считать поставленным. В СО, связанной с равномерно движущимся поездом, траектория монетки — прямая; в СО, связанной с проезжаемой многоэтажкой, траектория — кусок параболы.

Вы можете предпочесть и более короткое определение траектории, чем мы дали вначале:

Определение 1.9. Траектория в $\mathbb{R}^3$ — образ отображения $\vec{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

1.2. Время и часы

Определение 1.10. Время — то, что определяют часы, которые являются чем-то (телом или системой тел), в чем совершается периодический процесс.

Время определяется так, чтобы движение выглядело простым. От часов требуется, чтобы они шли равномерно. Однако, как догадаться, одинаковы ли временные промежутки между «тик-так»? Ответ прост: с помощью других часов. Однако это зацикливает наши рассуждения. Ситуация разрешается с помощью конвенции: «Давайте договоримся считать какие-то часы идущими равномерно по определению». Итак, теперь у нас есть эталонные часы, по которым можно проградуировать все остальные. Любые часы можно принять за эталонные, но целесообразно, чтобы они обладали высокой воспроизводимостью, то есть ежели Вы «понаделаете» уйму таких часов, то они должны с хорошей степенью точности одинаково «тик-такать». У Филатова есть стихотворение, которое называется «Песенка вдовы»: «В мужья сгодится мне любой, но есть и исключение — он должен быть хорош собой до умопомрачения». С часами точно также. А стихотворение оканчивается тем, что несмотря на уродливость, тупость и нищету претендента, женщина соглашается на любого «с серьезными намерениями». Подавляющее большинство физиков мыслят в духе филатовской вдовы.

1.3. Основные кинематические формулы

1.3.1. Уравнение движения и пространство-время

Пусть точка движется по какой-то траектории. Обозначим радиус-вектор этой точки за $\vec{x}(t)$, и пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис (см. рис. 1.1). Тогда радиус-вектор $\vec{x}(t)$, разложенный по этому базису, можно

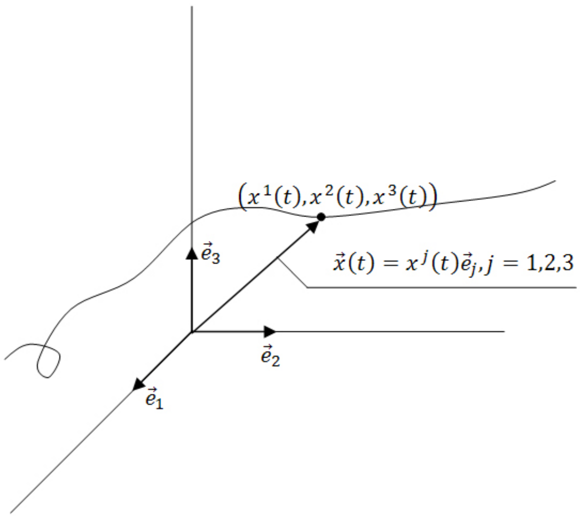

Рис. 1.1. К кинематическим уравнениям движения.

записать таким образом: $\vec{x}(t) = \sum\limits_{j=1}^{3} x^j(t)\vec{e}_j$. В дальнейшем мы будем использовать более короткую форму записи, также известную как соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам, а именно: $\vec{x}(t) = x^j(t)\vec{e}_j$ (подразумевается сумма по всем j). Кинематическим уравнением движения является следующее выражение:

$$\vec{x} = \vec{x}(t). \tag{1.1}$$

А если расписывать его покоординатно, то кинематическими уравнениями движения называется следующая система:

$$\begin{cases} x^1 = x^1(t), \\ x^2 = x^2(t), \\ x^3 = x^3(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Определение 1.11. График отображения $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — подмножество прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, составленного из всех пар вида $(t, \vec{x}(t)), t \in \mathbb{R}$.

Определение 1.12. Траектория частицы в пространстве-времени называется мировой линией частицы.

Положение точки в пространстве-времени задается четырехвектором x с контравариантными компонентами: $x^\mu = (t, \vec{x}(t)) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Характерную для векторной величины стрелочку над четырехвектором не ставят.

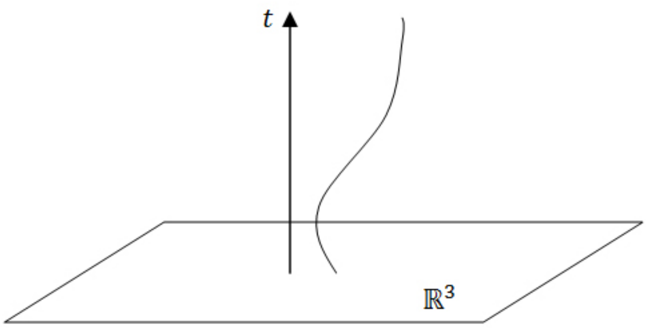

Рис. 1.2. Пространство-время.

1.3.2. Путь и скорость

Пусть даны условия, как в пункте 1.3.1, с той лишь разницей, что у нас есть два момента: начальный — t_i (от англ. «initial») и конечный — t_f(от англ. «final»). Радиус-векторы в эти моменты времени обозначим за $\vec{x}_i$ и $\vec{x}_f$ соответственно (см. рис 1.3). Вектор перемещения за время $t_f - t_i$: $\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$.

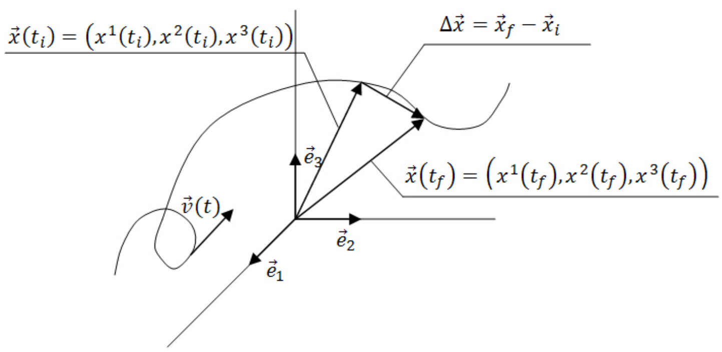

Рис. 1.3. К определениям вектора перемещения, мгновенной скорости и пути.

Определение 1.13. Путь l — длина траектории, пройденной за конечное время $t_f - t_i$.

Получим формулу для пути. Запишем для начала следующее: $dl = |d\vec{x}| = \sqrt{\langle\, d\vec{x} \mid d\vec{x}\,\rangle}$. Вектор скорости можно определить следующим образом:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}. \tag{1.3}$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории. Преобразуем выражение для dl:

$$dl = |d\vec{x}| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| |dt| = v dt = \sqrt{\langle\, \vec{v}(t) \mid \vec{v}(t)\,\rangle}.$$

Следовательно,

$$l = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\langle\, \vec{v}(t) \,|\, \vec{v}(t) \,\rangle} dt. \tag{1.4}$$

Утверждение 1.1. *Путь репараметризационно инвариантен.*

◂ Пусть $t = t(\theta)$, где θ — некоторый другой параметр времени. Тогда

$$\vec{x}(t(\theta)) = \vec{X}(\theta), \qquad \vec{V}(\theta) = \frac{d\vec{X}(\theta)}{d\theta}, \qquad \lambda = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sqrt{\langle\, \vec{v}(\theta) \,|\, \vec{v}(\theta) \,\rangle}\, d\theta.$$

Вектор $\vec{V}(\theta) = \dfrac{d\vec{X}(\theta)}{d\theta} = \dfrac{d\vec{X}(\theta)}{dt(\theta)} \dfrac{dt(\theta)}{d\theta}$, откуда следует, что $\lambda = l$. ▸

1.3.3. Ускорение

Определение 1.14. Ускорение — векторная величина, определяемая следующим соотношением:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}.$$

Вектор ускорения может быть разложен на тангенциальную и нормальную составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Тангенциальное ускорение и нормальное ускорения ортогональны, поэтому:

$$\vec{a}^2 = \vec{a}_\tau^2 + \vec{a}_n^2.$$

Получим формулу для тангенциального ускорения:

$$\langle\, \vec{\tau} \,|\, \vec{a} \,\rangle = a_\tau,$$

так как $\vec{a}_\tau \parallel \dfrac{\vec{v}}{v} \equiv \vec{\tau}$. Поскольку $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{v}}{v}$, а $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, то:

$$\langle\, \vec{\tau} \,|\, \vec{a} \,\rangle = \left\langle\, \frac{\vec{v}}{v} \,\middle|\, \frac{d\vec{v}}{dt} \,\right\rangle = \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} \langle\, \vec{v} \,|\, \vec{v} \,\rangle = \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} v^2 = \frac{dv}{dt}.$$

Отсюда получим:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}.$$

Покажем, что $\vec{a}_n = v\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$. Данное предположение берется из этого соотношения:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Так как вектор $\vec{\tau}$ — вектор единичной длины, то $\tau^2 = \langle\, \vec{\tau} \,|\, \vec{\tau} \,\rangle = 1$. Возьмем производную по времени от левой и правой части предыдущего выражения: $\dfrac{d}{dt} \langle\, \vec{\tau} \,|\, \vec{\tau} \,\rangle = 2 \left\langle\, \vec{\tau} \,\middle|\, \dfrac{d\vec{\tau}}{dt} \,\right\rangle = \dfrac{d}{dt} 1 = 0$. Поэтому $\vec{\tau} \perp \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$. Значит, наше предположение верно и

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

.

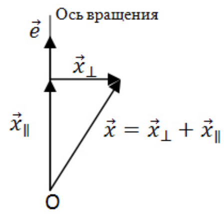

Рис. 1.4. К определениям понятий кинематики вращательного движения.

1.3.4. Кинематика вращательного движения

Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела вокруг некоторой оси: все точки за одинаковое время поворачиваются на одинаковый угол φ. Введем угол поворота φ (один и тот же для любой точки).

Определение 1.15. Угловой скоростью называется векторная величина, определяемая соотношением $\vec{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt}\vec{e}$ (рис. (1.4)).

Определение 1.16. Угловым ускорением называется векторная величина, определяемая соотношением $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Если вращение равномерное, то $\beta = 0$, а $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ (сравните с формулой для поступательного движения: $l = l_0 + vt$). Если вращение равноускоренное, то $\omega = \omega_0 + \beta t$, а $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \beta t^2/2$ (сравните с формулами для поступательного движения: $v = v_0 + at$; $l = l_0 + v_0 t + at^2/2$).

1.3.5. Связь линейных и угловых кинематических характеристик

Примем следующее обозначение: $|\vec{x}| = \bar{x}$. Имеем: $\Delta l = \bar{x}_\perp \Delta\varphi$. Отсюда $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta l}{\bar{x}_\perp}$. Это поможет получить еще со школы известную формулу, связывающую угловое ускорение и скорость:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dl}{dt}\frac{1}{\bar{x}_\perp} = \frac{v}{\bar{x}_\perp} \quad \Longrightarrow \quad v = \omega \bar{x}_\perp. \tag{1.5}$$

Аналогично:

$$a_\tau = \beta \bar{x}_\perp; \qquad\qquad a_n = \frac{v^2}{\bar{x}_\perp} = \frac{(\omega \bar{x}_\perp)^2}{\bar{x}_\perp} = \omega^2 \bar{x}_\perp \tag{1.6}$$

Существует и векторная формула связи $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{x}_\perp = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

Упражнение 1.1. *Покажем, что при вращательном движении абсолютно твердого тела любые две точки вращаются с одинаковыми угловыми скоростями и угловыми ускорениями $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ соответственно.*

◂ Докажем для угловой скорости. Покажем, что $\forall a, b \quad \omega_a = \omega_b$ (здесь a, b — индексы точек). Имеем, что $\dfrac{d}{dt}\langle\, \vec{x}_b - \vec{x}_a \,|\, \vec{x}_b - \vec{x}_a \,\rangle = 0$. Преобразуем данное выражение таким образом:

$$\frac{d}{dt}\langle\, \vec{x}_b - \vec{x}_a \,|\, \vec{x}_b - \vec{x}_a \,\rangle = 2\,\langle\, \vec{v}_a - \vec{v}_b \,|\, \vec{x}_a - \vec{x}_b \,\rangle = 2\,\langle\, \vec{\omega}_b \times \vec{x}_b - \vec{\omega}_a \times \vec{x}_a \,|\, \vec{x}_b - \vec{x}_a \,\rangle =$$
$$= 2(\vec{\omega}_b \times \vec{x}_b\, \vec{x}_b - \vec{\omega}_b \times \vec{x}_b\, \vec{x}_a - \vec{\omega}_a \times \vec{x}_a\, \vec{x}_b + \vec{\omega}_a \times \vec{x}_a\, \vec{x}_a) = 2((\vec{\omega}_b - \vec{\omega}_a) \times \vec{x}_a \vec{x}_b).$$

Таким образом имеем, что $2((\vec{\omega}_b - \vec{\omega}_a) \times \vec{x}_a \vec{x}_b) = 0$. Смешанное произведение равно нулю в трех случаях:

1. Один или несколько векторов равны нулю: $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_b = \vec{\omega}$.

2. Пара векторов коллинеарны.

3. Все три вектора компланарны.

Нас интересует только первый случай, поскольку остальные два соответствуют вырождению задачи. Таким образом, $\vec{\omega}_b = \vec{\omega}_a$. ▸

1.4. Описание траектории

1.4.1. Натуральный параметр кривой

На любой гладкой кривой (такой кривой, что параметр скорости $\vec{v}$ не обращается в ноль) можно выбрать параметр l (размерности длины) так, чтобы вектор скорости был единичным: $v = 1$. Натуральный параметр имеет простой геометрический смысл — он равен длине отрезка кривой, которую мы пробегаем:

$$\int_{\alpha}^{\beta} v dl = \beta - \alpha.$$

1.4.2. Кривизна плоской кривой

Определение 1.17. Кривизна k плоской кривой $\vec{x}(t)$, отнесенной к натуральному параметру l:

$$k = a(l) = \left| \frac{d^2\vec{x}}{dl^2} \right|.$$

Определение 1.18. Ориентированная кривизна: $\hat{k} = \operatorname{sign} \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix} k.$

Определение 1.19. Радиус кривизны: $R = \dfrac{1}{k}$.

Приведем несколько примеров вычисления кривизны.

1. Пусть задана прямая следующим образом:

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \alpha^1 \, l \\ x^2 = x_0^2 + \alpha^2 \, l. \end{cases}$$

Имеем, что $(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 = 1$. Вычислим k:

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2x^1}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x^2}{dl^2}\right)^2} = \sqrt{0+0} = 0.$$

Очевидно, что $R = \dfrac{1}{k} = \infty$.

2. Пусть задана окружность радиуса ρ:

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \rho \cos\left(\dfrac{l}{\rho}\right) \\ x^2 = x_0^2 + \rho \sin\left(\dfrac{l}{\rho}\right). \end{cases}$$

Здесь

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2x^1}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x^2}{dl^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-\cos\left(\frac{l}{\rho}\right)}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\left(\frac{l}{\rho}\right)}{\rho}\right)^2} = \frac{1}{\rho}.$$

Радиус кривизны, соответственно, равен $R = \rho$.

1.4.3. Формулы Френе

Утверждение 1.2. *Для любой пространственной кривой $\vec{x} = \vec{x}(l)$, отнесенной к натуральному параметру l, справедливы следующие соотношения:*

$$\frac{d\vec{v}}{dl} = k\vec{n}; \tag{1.7}$$

$$\frac{d\vec{n}}{dl} = \varkappa\vec{b} - k\vec{v}; \tag{1.8}$$

$$\frac{d\vec{b}}{dl} = -\varkappa\vec{n}, \tag{1.9}$$

где $\vec{v}$ — касательный вектор к кривой, $\vec{n}$ — вектор главной нормали, $\vec{b}$ — вектор бинормали, а $\varkappa$ — кручение.

Замечание 1.1. В утверждении (1.2) соотношения можно представить в другом виде, в котором достаточно удобно их запоминать:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{v}}{dl} \\ \frac{d\vec{n}}{dl} \\ \frac{d\vec{b}}{dl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

Замечание 1.2. Очевидно, что если в третьей формуле Френе вектор бинормали постоянен, то кручение равно нулю: $\vec{b} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \varkappa = 0$.

Определение 1.20. Натуральными уравнениями пространственной кривой называется система:

$$\begin{cases} k = k(l), \\ \varkappa = \varkappa(l). \end{cases}$$

Кривизна и кручение — полный набор геометрических инвариантов кривой в евклидовом пространстве, что означает, что если для пространственной кривой известны функции $k = k(l)$ и $\varkappa = \varkappa(l)$, то можно восстановить кривую с точностью до движения всего пространства, сохраняющего данную метрику (движение метрики точно сохраняет вид скалярного произведения).