ТЕОРЕМА ГЕЛЛ-МАННА-ЛОУ

На ЛЕКЦИИ 6 мы видели, как можно получить пертурбационное разложение для оператора временной эволюции в представлении взаимодействия. Сие разложение обеспечивает систематический метод построения $\mathbb{S}-$матрицы. А ещё этот формализм позволяет вычислять энергетические сдвиги состояний в дискретном спектре.

Стартуя с дискретного собственного состояния $|\Phi\rangle$ невозмущённого гамильтониана H_0 (не обязательно с ферми-вакуума $|\Phi_0\rangle$, хотя, в дальнейшем нас будет интересовать в основном именно этот случай), мы намерены найти «соответствующее» собственное состояние $|X\rangle$ полного гамильтониана

$$H = H_0 + gH_I$$

Здесь величина возмущения параметризована константой связи g, которая поможет нам отслеживать члены в пертурбативном разложении. Обозначим через E энергию, отвечающую невозмущённому гамильтониану H_0:

$$H_0|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$$

а через $\widehat{E}$ – энергию, отвечающую полному гамильтониану H:

$$H|X\rangle = \widehat{E}|X\rangle$$

(что согласуется с обозначениями, использованными мною ранее в ЛЕКЦИИ 1, 6). Если H_I является стационарным возмущением, например, потенциалом взаимодействия в многочастичной системе, то полюбившийся нам оператор временной эволюции, на первый взгляд, – не совсем-то подходящий инструмент для описания системы. Однако можно «руками» ввести в задачу зависимость от времени: адиабатическое включение взаимодействия подразумевает такую модификацию гамильтониана системы, чтобы

$$H_\alpha(t=0) = H$$

$$\lim_{t\to-\infty} H_\alpha(t) = H_0; \quad \lim_{t\to+\infty} H_\alpha(t) = H_0 .$$

В частности, всем хороша замена вида

$$H = H_0 + H_I \quad \rightarrow \quad H_\alpha(t) = H_0 + gexp(-\alpha|t|)H_I,$$

в результате которой стационарная проблема трансформируется в проблему, зависящую от времени. Чтобы физические наблюдаемые не зависели от характера затухания оператора H_I при $t\to\pm\infty$, нужно чтобы в конце вычислений можно было взять предел $\alpha\to 0$ (этот момент, как мы увидим, заслуживает особого внимания).

В представлении взаимодействия (на которое намекают «шляпки») уравнение эволюции вектора состояния $|\hat{X}_\alpha(t)>$, отвечающего модифицированному гамильтониану, имеет вид

$$i\partial_t|\hat{X}_\alpha(t)> = gexp(-\alpha|t|)\hat{H}_I(t)|\hat{X}_\alpha(t)>$$

$$\hat{H}_I(t) = \exp(iH_o t)H_I\exp(-iH_o t)$$

Соответствующий оператор временной эволюции, трансформирующий состояние $|\hat{X}_\alpha(t_0)>$ в состояние $|\hat{X}_\alpha(t)>$,

$$|\hat{X}_\alpha(t)> = \tilde{U}_\alpha(t,t_0)|\hat{X}_\alpha(t_0)>$$

удовлетворяет дифуру

$$i\partial_t\tilde{U}_\alpha(t,t_0) = gexp(-\alpha|t|)\hat{H}_I(t)\tilde{U}_\alpha(t,t_0).$$

В качестве начального условия потребуем, чтобы

$$\lim_{t\to-\infty}|\hat{X}_\alpha(t)> = |\Phi>.$$

С другой стороны, из определения модифицированного гамильтониана имеем

$$H_\alpha(0) = H.$$

Таким образом, есть надежда, что состояние

$$|X_\alpha > \equiv |\hat{X}_\alpha(0) > = \widetilde{U}_\alpha(0, -\infty)|\Phi >$$

каким-то образом связано с решением уравнения

$$H|X\rangle = \hat{E}|X\rangle$$

И она может оправдаться, если оператор возмущения включается «достаточно медленно».

Теперь давайте обратимся к следующим ключевым утверждениям.

1. Состояние

$$|X > = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\widetilde{U}_\alpha(0, -\infty)|\Phi >}{< \Phi|\widetilde{U}_\alpha(0, -\infty)|\Phi >} \equiv \lim_{\alpha\to 0} \frac{|X_\alpha >}{< \Phi|X_\alpha >}$$

является собственным состоянием полного гамильтониана H*, то есть*

$$H \lim_{\alpha\to 0} \frac{|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle} = \hat{E} \lim_{\alpha\to 0} \frac{|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle}.$$

Справедливость последнего утверждения должна обеспечиваться существованием предела, и тем фактом, что пертурбационное разложение $|X\rangle$ *по степеням константы связи* g *хорошо определено.*

Терема Гелл-Манна-Лоу не гарантирует существование состояния $|X\rangle$*, определенного выше предельным соотношением, однако утверждает что, если это состояние можно построить, то проблема взаимодействия разрешима:*

2. Обусловленный взаимодействием сдвиг энергии можно вычислить следующим образом

$$\Delta E = \hat{E} - E = \lim_{\alpha\to 0} i\alpha g \partial_g ln < \Phi|\widetilde{U}_\alpha(0, -\infty)|\Phi >.$$

Дальнейшее рассмотрение буквально следует работе M. Gell-Mann, F. Low (Bound states in quantum field theory, Phys. Rev. 84, 1951).

$$(H_0 - E)\big|X_\alpha > = (H_0 - E)\widetilde{U}_\alpha(0, -\infty)\big|\Phi > = [H_0, \widetilde{U}_\alpha(0, -\infty)\}|\Phi > =$$

$$[H_0, 1 + \textstyle\sum_{n=1,\infty} \frac{(-i)^n}{n!} g^n \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n \exp(+\alpha(t_1 + \dots + t_n)) \Upsilon\{\hat{H}_I(t_1) \dots \hat{H}_I(t_n)\}]|\Phi > .$$

Поставив второй знак равенства, мы воспользовались

$$H_0|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$$

Прежде, чем двигаться дальше, докажите справедливость тождества

$$[A, B_1 B_2 \dots B_n] = [A, B_1] B_2 \dots B_n + B_1 [A, B_2] B_3 \dots B_n + \dots + B_1 \dots B_{n-1} [A, B_n]$$

и убедитесь, что если в представлении Шрёдингера оператор A *от времени явно не зависит, то верно соотношение*

$$\frac{d}{dt}\hat{A} = i\left[H_0, \hat{A}\right]$$

Далее, для любого фиксированного порядка времён $t_{j_1} \ge t_{j_2} \ge \dots \ge t_{j_n}$

$$[H_0, \Upsilon\{\hat{H}_I(t_1) \dots \hat{H}_I(t_n)\}] = [H_0, \hat{H}_I(t_{j_1}) \dots \hat{H}_I(t_{j_n})] =$$

$$= [H_0, \hat{H}_I(t_{j_1})]\hat{H}_I(t_{j_2}) \dots \hat{H}_I(t_{j_n}) + \dots + \hat{H}_I(t_{j_1}) \dots \hat{H}_I(t_{j_{n-1}})[H_0, \hat{H}_I(t_{j_n})] =$$

$$= \frac{1}{i}\partial_{t_{j_1}} \hat{H}_I(t_{j_1})\hat{H}_I(t_{j_2}) \dots \hat{H}_I(t_{j_n}) + \dots + \hat{H}_I(t_{j_1}) \dots \hat{H}_I(t_{j_{n-1}})\frac{1}{i}\partial_{j_n}\hat{H}_I(t_{j_n}) =$$

$$= \tfrac{1}{i}\textstyle\sum_{l=1,n} \partial_{t_l}\hat{H}_I(t_{j_1})\hat{H}_I(t_{j_2}) \dots \hat{H}_I(t_{j_n}) = \tfrac{1}{i}\sum_{l=1,n} \partial_{t_l}\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2) \dots \hat{H}_I(t_n)\}.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{0} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{0} dt_n \sum_{l=1,n} \partial_{t_l}\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1) \dots \hat{H}_I(t_n)\} = n \int_{-\infty}^{0} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{0} dt_n \partial_{t_1}\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1) \dots \hat{H}_I(t_n)\}$$

и в обновлённом виде запишем, что получилось

$$(H_0 - E)|X_\alpha> =$$

$$-g\sum_{n=1,\infty}\frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!}g^{n-1}\int_{-\infty}^{0}dt_1\ldots\int_{-\infty}^{0}dt_n exp[+\alpha(t_1+\cdots+t_n)]\partial_{t_1}\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\ldots\hat{H}_I(t_n)\}|\Phi>.$$

Продолжим продвигаться в направлении упрощения выражения, интегрируя по частям

$$\int_{-\infty}^{0}dt_1\exp(\alpha t_1)\,\partial_{t_1}\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\ldots\hat{H}_I(t_n)\} =$$

$$= \exp(+\alpha t_1)\,\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\ldots\hat{H}_I(t_n)\}\Big|_{-\infty}^{0} - \alpha\int_{-\infty}^{0}dt_1\exp(+\alpha t_1)\,\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\ldots\hat{H}_I(t_n)\} =$$

$$= \hat{H}_I(0)\Upsilon\{\hat{H}_I(t_2)\ldots\hat{H}_I(t_n)\} - \alpha\int_{-\infty}^{0}dt_1\exp(+\alpha t_1)\,\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\ldots\hat{H}_I(t_n)\}.$$

приходим к

$$(H_0 - E)|X_\alpha> =$$

$$= -g\sum_{n=1,\infty}\frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!}g^{n-1}\int_{-\infty}^{0}dt_2\ldots\int_{-\infty}^{0}dt_n\exp[+\alpha(t_2+\ldots+t_n)]\times$$

$$\times\left(\hat{H}_I(0)\Upsilon\{\hat{H}_I(t_2)\ldots\hat{H}_I(t_n)\} - \alpha\int_{-\infty}^{0}dt_1\exp(+\alpha t_1)\,\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\ldots\hat{H}_I(t_n)\}\right)|\Phi> =$$

$$= -g\hat{H}_I(0)\tilde{U}_\alpha(0,-\infty)|\Phi> +$$

$$+\alpha g\sum_{n=1,\infty}\frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!}g^{n-1}\int_{-\infty}^{0}dt_1\ldots\int_{-\infty}^{0}dt_n exp[+\alpha(t_1+\cdots+t_n)]\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\ldots\hat{H}_I(t_n)\}|\Phi> =$$

$$= -g\hat{H}_I(0)\tilde{U}_\alpha(0,-\infty)|\Phi> +$$

$$+\alpha g\frac{1}{-i}\partial_g\sum_{n=0,\infty}\frac{(-i)^n}{n!}g^n\int_{-\infty}^{0}dt_1\ldots\int_{-\infty}^{0}dt_n exp[+\alpha(t_1+\cdots+t_n)]\Upsilon\{\hat{H}_I(t_1)\ldots\hat{H}_I(t_n)\}|\Phi> =$$

$$= -g\hat{H}_I(0)|X_\alpha> \ + i\alpha g\partial_g|X_\alpha>.$$

Подытожим:

$$(H_0 - E)|X_\alpha> = \ -g\hat{H}_I(0)|X_\alpha> \ + i\alpha g\partial_g|X_\alpha> \to \ (H - E)|X_\alpha> = i\alpha g\partial_g|X_\alpha>.$$

Если допустить, что существует хороший предельный переход

$$\lim_{\alpha\to 0}|X_\alpha\rangle$$

то правая часть последнего выражения исчезает из-за малого множителя α*. Таким образом, сделанное допущение ведёт к заключению, что состоянию системы с взаимодействием* $|X_\alpha\rangle$ *отвечает та же энергия, что и состоянию системы без взаимодействия* $|\Phi\rangle$*:*

$$\begin{cases} H|X_\alpha\rangle = E|X_\alpha\rangle \\ H_0|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle \end{cases}$$

Вывод, очевидно, не верен, значит, придётся отвергнуть допущение, из которого он следует, заменив предложенную гипотезу более жизнеспособной, а именно, взгляните на продолжение истории:

$$(H-E)\frac{|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle} = i\alpha\frac{\partial_g|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle} = i\alpha g\left(\partial_g\frac{|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle} + |X_\alpha\rangle\frac{\partial_g\langle\Phi|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle^2}\right)$$

$$H - E - i\alpha g\partial_g\ln\langle\Phi|X_\alpha\rangle\ \frac{|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle} = i\alpha g\partial_g\frac{|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle}$$

Устремляя параметр α *к нулю, приходим к заключению*

$$(H-E)\lim_{\alpha\to 0}\frac{|X_\alpha\rangle}{\langle\Phi|X_\alpha\rangle} = 0 \quad ; \quad \hat{E} = E + \Delta E = E + \lim_{\alpha\to 0} i\alpha g\partial_g\ln\langle\Phi|X_\alpha\rangle$$

ТОЖДЕСТВО БЭЙКЕРА-КЭМПБЕЛЛА-ХАУСДОРФА

Часто встречающиеся объекты требуют пристального внимания. По мере изложения мы постоянно сталкиваемся с объектами вида $\exp(A)B\exp(-A)$. *Приведите примеры.* *Докажем соотношение*

$$\exp(A)B\exp(-A) = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \ldots$$

Из-за последней записи может показаться, что стоящее слева элегантное выражение в правой части было до неузнаваемости изуродовано, однако не стоит забывать «о богатом внутреннем мире» экспоненциалов (операторная экспонента – есть просто способ кратко говорить о тейлоровском ряде для соответствующего оператора). Таким образом, манифест Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа состоит в том, что нечто сложное можно «приручить», выразив через существенно более простые объекты – коммутаторы.

Для доказательства воспользуемся следующим поучительным приёмом: погрузим исходную задачу в семейство аналогичных, параметризованных с помощью x

$$\exp(A)B\exp(-A) \to \exp(xA)B\exp(-xA) \equiv f(x).$$

Посчитаем скорость изменения $f \;\; x$ *, связанную с шевелением параметра* x

$$\partial_x f(x) = A\exp(xA)B\exp(-xA) - \exp(xA)B\exp(-xA)A$$

Получившийся дифур

$$\partial_x f(x) = [A, f(x)]$$

при очевидном начальном условии

$$f(0) = B$$

можно переписать в эквивалентной форме

$$f(x) = B + \int_0^x dx_1 [A, f(x_1)]$$

Последнее интегральное уравнение элементарно решается итерированием

$$f^{0}(x)=B$$

$$f^{1}(x)=B+\int_{0}^{x}dx_1[A,f^{0}(x_1)]=B+[A,B]x$$

$$f^{2}(x)=B+\int_{0}^{x}dx_1[A,f^{1}(x_1)]=B+[A,B]x+[A,[A,B]]\frac{x^2}{2}$$

....

$$f^{n}(x)=B+\ A,B\ x+\ldots+[A,[A,\ldots[A,B]]]\frac{x^n}{n!}$$

Устремляя $n\to\infty$ и полагая $x=1$, выделяем исходную задачу из семейства аналогичных – в результате получаем желанную формулу Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа.

При рассмотрении бозе-систем оказываются востребованными соотношения типа

$$\exp\left(i\varepsilon b^{\dagger}bt\right)b\exp\left(-i\varepsilon b^{\dagger}bt\right)=\exp\left(-i\varepsilon t\right)b$$

$$\exp\left(i\varepsilon b^{\dagger}bt\right)b^{\dagger}\exp\left(-i\varepsilon b^{\dagger}bt\right)=\exp\left(+i\varepsilon t\right)b^{\dagger}$$

Убедитесь в их справедливости, воспользовавшись тождеством Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа, коммутационными соотношениями для бозонных операторов рождения и уничтожения, а также формулой

$$[A,BC]=[A,B]C+B[A,C].$$

Отталкиваясь от известных соотношений

$$\hat{b}_q(t)=U^{(0)+}(t,t_0)b_qU^{(0)}(t,t_0);\quad U^{(0)}(t,t_0)=\exp\bigl(-iH_0(t-t_0)\bigr);\quad H_0=\sum\nolimits_q\varepsilon_q b_q^{+}b_q$$

и используя коммутационные соотношения для бозе-операторов рождения и уничтожения в шрёдингеровском представлении, докажите аналогичные коммутационные соотношения в представлении взаимодействия для операторов, взятых в различные моменты времени

$$[\hat{b}_{q_1}(t_1),\hat{b}_{q_2}(t_2)]=[\hat{b}^{\dagger}_{q_1}(t_1),\hat{b}^{\dagger}_{q_2}(t_2)]=0$$

$$[\hat{b}_{q_1}(t_1),\hat{b}^{\dagger}_{q_2}(t_2)]=\exp[-i\varepsilon_{q_1}(t_1-t_2)]\delta_{q_1q_2}$$

При рассмотрении ферми-систем жизнь существенно упрощают соотношения

$$\exp\left(i\varepsilon a^{\dagger}at\right)a\exp\left(-i\varepsilon a^{\dagger}at\right)=\exp\left(-i\varepsilon t\right)a$$

$$\exp\left(i\varepsilon a^{\dagger}at\right)a^{\dagger}\exp\left(-i\varepsilon a^{\dagger}at\right)=\exp\left(+i\varepsilon t\right)a^{\dagger}$$

Покажите их справедливость с помощью тождества Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа, антикоммутационных соотношений для фермионных операторов рождения и уничтожения, а также простой и зачастую очень полезной формулой, помогающей трансформировать коммутаторы в антикоммутаторы (заодно проверьте, что она верна)

$$[A,BC]=\{A,B\}C-B\{A,C\}.$$

Отталкиваясь от известных соотношений

$$\hat{a}_k(t)=U^{(0)+}(t,t_0)a_kU^{(0)}(t,t_0);\quad U^{(0)}(t,t_0)=\exp\bigl(-iH_0(t-t_0)\bigr);\quad H_0=\sum\nolimits_k\varepsilon_k a_k^{+}a_k$$

и используя антикоммутационные соотношения для ферми-операторов рождения и уничтожения в шрёдингеровском представлении, докажите аналогичные антикоммутационные соотношения в представлении взаимодействия для операторов, взятых в различные моменты времени

$$\{\hat{a}_{k_1}(t_1),\hat{a}_{k_2}(t_2)\}=\{\hat{a}^{\dagger}_{k_1}(t_1),\hat{a}^{\dagger}_{k_2}(t_2)\}=0;$$

$$\{\hat{a}_{k_1}(t_1),\hat{a}^{\dagger}_{k_2}(t_2)\}=\exp(-i\varepsilon_{k_1}(t_1-t_2))\delta_{k_1k_2}$$

ТОЖДЕСТВО ПОГЛОЩЕНИЯ

Докажем справедливость ещё одного полезного соотношения, на которое я буду ссылаться как на «тождество поглощения»

$$A^{-1}\exp(B)A = \exp(A^{-1}BA)$$

Приведите примеры использования этого тождества.

Используя определение операторной экспоненты и тот факт, что $1 = AA^{-1}$ *получаем*

$$A^{-1}\exp\left(B\right)A = A^{-1}(1+B+\frac{B^2}{2!}+\frac{B^3}{3!}+...)A =$$

$$=1+A^{-1}BA+\frac{A^{-1}B(AA^{-1})B(AA^{-1})A}{2!}+\frac{A^{-1}B(AA^{-1})B(AA^{-1})B(AA^{-1})A}{3!}...+=$$

$$=1+A^{-1}BA+\frac{(A^{-1}BA)^2}{2!}+\frac{(A^{-1}BA)^3}{3!}+...=\exp(A^{-1}BA)$$

Ход доказательства подсказывает, что полученный результат можно обобщить на все операторные функции, которые можно разложить в степенной ряд, отсюда мораль:

$$A^{-1}f(B)A = f(A^{-1}BA).$$