

Листок к лекции от 07.11.14

1. Докажите справедливость соотношения

$$\tilde{U}(t, t_0) = \Upsilon \exp \left( -i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I(t') \right)$$

Здесь  $\Upsilon$  – оператор хронологического упорядочения по Дайсону.

2. Покажите унитарность  $\mathbb{S}$  – матрицы. Используя унитарность оператора  $\mathbb{S}$ , убедитесь в справедливости соотношения

$$2 \operatorname{Im} \langle ini | \mathfrak{M} | ini \rangle = \sum_j |\langle ini | \mathfrak{M} | j \rangle|^2$$

Здесь  $|ini\rangle$  – некоторое состояние системы,  $|j\rangle$  – полный набор состояний,  $\mathfrak{M}$  – матрица перехода, возникающая в результате расщепления  $\mathbb{S}$  – матрицы на тривиальную и нетривиальную составляющие

$$\mathbb{S} = 1 + i\mathfrak{M}.$$

3. Убедитесь, что при переходе от представления взаимодействия к хайзенберговскому представлению оператор испытывает превращение вида

$$\tilde{O}(t) = \tilde{U}^\dagger(t, t_0) \hat{O}(t) \tilde{U}(t, t_0)$$

4. Используя адиабатическую гипотезу, покажите справедливость пертурбационного разложения  $I$ -частичной функции Грина

$$t > t'$$

$$G(k, t; k' t') = -i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\langle \Phi_0 | \Upsilon \{ \hat{a}_k(t) \hat{a}_{k'}^\dagger(t') \mathbb{S}_\alpha \} | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \mathbb{S}_\alpha | \Phi_0 \rangle}$$

$$t' > t$$

$$G(k, t; k' t') = +i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\langle \Phi_0 | \Upsilon \{ \hat{a}_{k'}^\dagger(t') \hat{a}_k(t) \mathbb{S}_\alpha \} | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \mathbb{S}_\alpha | \Phi_0 \rangle}$$

Здесь  $\alpha$  – адиабатический параметр.

5. Убедитесь в справедливости формулы

$$\Delta E_0 \equiv \hat{E}_0 - E_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} i \left[ \partial_t \ln \mathfrak{R}(t) \right]_{t=t_0}$$

связывающей обусловленный взаимодействием сдвиг энергии основного состояния системы с вакуумной амплитудой

$$\mathfrak{R}(t) \equiv \langle \Phi_0 | \tilde{U}(t, -\infty) | \Phi_0 \rangle$$

6. Докажите тождество Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа

$$\exp A \exp B \exp -A = B + A, B + \frac{1}{2!} [A, A, B] + \frac{1}{3!} [A, [A, A, B]] + \dots$$

7. При рассмотрении бозе-систем оказываются востребованными соотношения типа

$$\begin{aligned}\exp(i\varepsilon b^\dagger bt) b \exp(-i\varepsilon b^\dagger bt) &= \exp(-i\varepsilon t) b \\ \exp(i\varepsilon b^\dagger bt) b^\dagger \exp(-i\varepsilon b^\dagger bt) &= \exp(+i\varepsilon t) b^\dagger\end{aligned}$$

Убедитесь в их справедливости, воспользовавшись тождеством Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа, коммутационными соотношениями для бозонных операторов рождения и уничтожения, а также формулой

$$A, BC = A, B C + B A, C .$$

8. При рассмотрении ферми-систем жизнь упрощают аналогичные соотношения

$$\begin{aligned}\exp(i\varepsilon a^\dagger at) a \exp(-i\varepsilon a^\dagger at) &= \exp(-i\varepsilon t) a \\ \exp(i\varepsilon a^\dagger at) a^\dagger \exp(-i\varepsilon a^\dagger at) &= \exp(+i\varepsilon t) a^\dagger\end{aligned}$$

Покажите их справедливость с помощью тождества Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа, антикоммутационных соотношений для фермионных операторов рождения и уничтожения, а также простой и зачастую очень полезной формулой, помогающей трансформировать коммутаторы в антикоммутаторы (заодно проверьте, что она верна)

$$A, BC = A, B C - B A, C .$$

9. Докажите справедливость тождества «поглощения»

$$A^{-1} f B A = f A^{-1} B A$$

Здесь  $f \dots$  – разложимая в степенной ряд операторная функция.