Уравнения Максвелла

Нам осталось сделать один шаг до того, как мы сможем выписать систему уравнений Максвелла – фундамент всей электродинамики. Для объяснения явления электромагнитной индукции в неподвижном контуре мы сформулировали 1 положение теории Максвелла: изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Второе положение теории Максвелла говорит о том, что верно и обратное (иначе просто было бы не справедливо!).

Второе положение теории Максвелла

Изменяющееся во времени электрическое поле порождает магнитное поле,[1] причем такое, что циркуляция его напряженности по любому контуру Г определяется скоростью изменения потока вектора электрического смещения через любую поверхность S, границей которой служит этот контур:

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (1)$$

или, если поверхность неподвижна и не деформируется, то

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (2)$$

Обратим внимание на отсутствие знака «минус» в этих формулах по сравнению с первым положением теории Максвелла.

Применяя, как обычно, теорему Стокса, приводим уравнение (1) к дифференциальной форме:

$$rot(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{\partial D}/\partial t.$$

Теперь вспомним, что магнитное поле порождается еще и токами, так что в общем случае

Закон полного тока

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad (3)$$

$$rot(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{\partial D}/\partial t. \qquad (4)$$

Поскольку речь идет о напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$, то вектор $\boldsymbol{j}$ – плотность тока проводимости, а величина

[1] Мы не говорим «вихревое магнитное поле» просто потому, что оно всегда вихревое.

$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ называется *плотностью тока смещения* ($\boldsymbol{j}^{\text{см}}$). Интеграл $\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$ тогда разумно назвать *током смещения*.

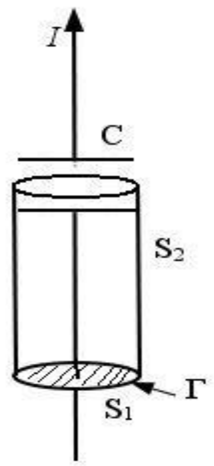
Ток смещения и его плотность

Уравнения (3) и (4) называют *законом полного тока* соответственно в интегральной и дифференциальной форме.[1]

Для второго положения теории Максвелла нет такой яркой иллюстрации как для первого положения (явление электромагнитной индукции). Однако оно как бы спасает некоторые ситуации, не говоря уже о том, что без него вообще бы не было электромагнитных волн.

Пример 1

Рассмотрим пример, объясняющий историческое название «*ток* смещения»[2]. Пусть по прямолинейному проводнику протекает ток I, заряжающий конденсатор C. В качестве контура Г возьмем окружность с центром на токе, как показано на рисунке. Сначала применим закон полного тока к поверхности S_1 – мембранке, натянутой на этот контур (заштрихована).



$$\oint_\Gamma \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I.$$

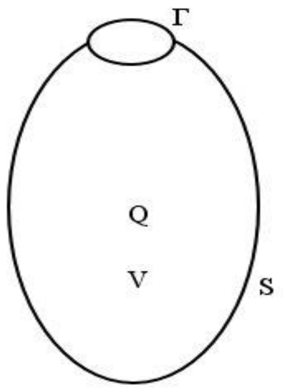
Теперь обратимся к другой поверхности S_2 с той же границей – перевернутому котелку, части цилиндрической поверхности без заштрихованного основания. Ток проводимости ее не пересекает, зато внутри конденсатора есть электрическое поле, и его вектор смешения, как мы знаем $D = \sigma$. Будем считать, что σ – поверхностная плотность зарядов на нижней обкладке площади S, заряд которой, стало быть, $Q = \sigma S$. Ток смещения $\frac{\partial D}{\partial t} S = \frac{dQ}{dt} = I$, так что правая часть уравнения (3) оказывается одинаковой для любой поверхности. Ток смещения как бы замыкает цепь там, где нет тока проводимости.

---

[1] В литературе нет единодушия в том, что называть законом полного тока. Поскольку это не принципиально, мы остановимся на том, что сказано здесь.

[2] Слово «смещение» в этом названии связано с названием «вектор смещения».

В качестве второго примера рассмотрим воздушный шарик после того, как его надули, но не завязали. Посмотрим, во что превратиться закон полного тока (3), если завязать шарик, т.е. стянуть контур Г в точку (при этом поверхность S становится замкнутой): Пример 2



$$0 = \oiint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} + \frac{d}{dt} \oiint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Но последний интеграл равен по теореме Гаусса заряду Q внутри поверхности S, так что получается правильная формула для закона сохранения заряда (уравнение непрерывности в интегральной форме, см. (3) лекции 5).

Система уравнений Максвелла

Мы выпишем систему уравнений Максвелла сразу в обычной форме и с использованием оператора набла.

Уравнения Максвелла

$$div(\boldsymbol{D}) = \rho \qquad \text{или} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho\,, \tag{5}$$
$$div(\boldsymbol{B}) = 0 \qquad \text{или} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{6}$$
$$rot(\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{или} \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{7}$$
$$rot(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \text{ или } \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{8}$$

где ρ – плотность *сторонних* зарядов, $\boldsymbol{j}$ – плотность тока проводимости.

Мы видим, что красота этих уравнений заключается, прежде всего, в их внутренней симметрии; понимаем, почему Кюри, Дираку и многим другим ученым хотелось найти магнитные заряды: в уравнениях (5) появилась бы их плотность, а в уравнениях (7) – плотность их токов, и система приобрела бы еще более симметричный вид.

Мы замечаем, однако, и наличие небольшой асимметрии: различие в знаках перед производными по времени в уравнениях (7) и (8). Симметрия делает картину мира исходно простой и красивой, но в некотором смысле мертвой. Небольшая симметрия приносит в нее жизнь. Если бы не было упомянутого различия в знаках, невозможны были бы,

.

как мы увидим, электромагнитные волны, и вообще все застыло бы.

Уравнения Максвелла должны быть дополнены *материальными соотношениями*, связывающие пары векторов $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$. В простейшем линейном случае изотропной среды они, как мы знаем, имеют вид

$$\boldsymbol{B} = \mu\mu_0\boldsymbol{H} \text{ и } \boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}. \quad (9)$$

Материальные соотношения

Кроме того, вообще говоря, необходимо задать краевые и начальные условия.

Сейчас мы перейдем к изучению одного из важнейших решений уравнений Максвелла – электромагнитным волнам.

Волновое уравнение

Нам придется ограничиться простейшим случаем – волнами в свободном пространстве.

Свободным пространством называют область пространства, где нет сторонних зарядов и токов проводимости, т.е.

Свободное пространство

$$\rho = 0 \text{ и } \boldsymbol{j} = 0$$

Мы дополнительно потребуем, чтобы электрическая и магнитная проницаемости были постоянны как во времени, так и в пространстве:

$$\varepsilon = const \text{ и } \mu = const.$$

С помощью материальных соотношений (9), приводим уравнения Максвелла (исключая векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{H}$) для свободного пространства к следующему виду:

Уравнения Максвелла для свободного пространства

$$div(\boldsymbol{E}) = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0\,, \quad (10)$$

$$div(\boldsymbol{B}) = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad (11)$$

$$rot(\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \text{ или } \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \quad (12)$$

$$rot(\boldsymbol{B}) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \text{ или } \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \quad (13)$$

где

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}. \quad (14)$$

Сначала немного поиграем с этими уравнениями, а именно возьмем ротор от уравнения (12). Для левой части с помощью формулы «**б**ац минус **ц**аб» (только теперь надо следить за тем, чтобы операторы всегда находились слева от векторов) получаем

$$\boldsymbol{\nabla} \times [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}] = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E},$$

так как $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ по уравнению (10), а квадрат оператора набла есть оператор Лапласа.

В правую часть помещаем ротор $\boldsymbol{B}$ из уравнения (13):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}] = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2},$$

так что

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \qquad (15)$$

Если возьмем ротор от уравнения (13), то увидим, что

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}. \qquad (16)$$

Мы получили не что иное, как волновые уравнения для векторных полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, стало быть, среди решений уравнений Максвелла должны быть недеформирующиеся волны, распространяющиеся со скоростью v (14).

Скорость электромагнитной волны в вакууме

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}. \qquad (17)$$

Скорость света в вакууме

может быть измерена с использованием только, например, законов Кулона и Ампера. При этом получается значение, равное скорости света в вакууме, измеренной непосредственно. Это и огромное количество других доказательств показывают, что свет – электромагнитная волна.

В среде скорость электромагнитной волны (скорость света) дается формулой

Скорость света в среде

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \text{или} \quad v = c/n, \qquad (18)$$

где

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} - \qquad (19)$$

абсолютный показатель преломления.[1]

Абсолютный показатель преломления

Почитайте в книжках или в лекциях по математике об общих решениях волнового уравнения, а мы сразу займемся наиболее важным частным случаем.

[1] В оптике обычно полагают $\mu = 1$, так что $n = \sqrt{\varepsilon}$. (20)

Плоская монохроматическая волна

Этот тип волн особенно важен по двум причинам.

Во-первых, такие волны – «любимые» (или, как говорят, *собственные*) для большинства природных и искусственных систем и устройств. Это означает, что если на вход какой-либо преобразующей системы поступает плоская монохроматическая волна, то на выходе получается тоже плоская монохроматическая волна, только с другой, вообще говоря, амплитудой и фазой.

Во-вторых, любое решение уравнений (15) и (16) может быть разложено по таким волнам (представлено в виде их суперпозиции). Поэтому намечается следующий путь решения задачи о преобразовании сложной волны каким-либо устройством. Сначала раскладываем сложную волну по плоским монохроматическим волнам, решаем простую задачу об их преобразовании, и наконец, складываем полученные решения.

Общий вид плоской монохроматической волны вы знаете из механики. Например, для вектора $\boldsymbol{E}$ такая волна выглядит так:

Плоская монохроматическая волна

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \varphi_{0E}), \qquad (21)$$

где $\boldsymbol{E}_0$ – амплитуда (в нашем случае это вектор, задающий дополнительно направление колебаний), ω – циклическая частота (так что период колебаний $T = 2\pi/\omega$), а φ_{0E} – начальная фаза.

В процессе вычислений записью волны в форме (21) используют т только в том случае, когда речь идет о нелинейных преобразованиях. Если же все преобразования линейны,[1] то *для упрощения вычислений* используют комплексную запись

Плоские монохроматические волны в комплексной форме

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{-i\omega t} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \qquad (22)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \widetilde{\boldsymbol{B}}_0 e^{-i\omega t} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \qquad (23)$$

[1] К линейным преобразованиям относятся умножение на число (в том числе – комплексное, но не на функцию!), сложение, дифференцирование, интегрирование. Вычисление модуля некоторого комплексного выражения $|z| = \sqrt{z \cdot z*}$ линейным преобразованием, конечно, не является.

где $\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 = \boldsymbol{E}_0 e^{i\varphi_{0E}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{B}}_0 = \boldsymbol{B}_0 e^{i\varphi_{0B}}$ – комплексные амплитуды для волн $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно. Как мы видим, комплексные амплитуды несут информацию не только собственно об амплитудах, но и о начальных фазах волн. Когда же речь идет о колебаниях в фиксированной точке ($\boldsymbol{r} = const$), то к комплексной амплитуде относят и постоянный множитель $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$.

Смысл комплексной записи

Сами по себе комплексные волны (22) и (23) непосредственного физического смысла не имеют. Смысл им придает то, что под ними подразумевается. Мы будем считать, что всегда, когда записана волна (или колебания) в комплексной форме, имеется в виду ее действительная часть.[1]

Запись (21) – действительная часть записи (22), и в смысле нашей договоренности они эквивалентны.[2]

Использование комплексной записи основано на следующем правиле.

Если необходимо провести линейные вычисления с волнами (колебаниями), то можно сделать так:

а) перейти к комплексной записи так, чтобы исходное выражение являлось действительной частью этой записи;

б) выполнить все преобразования;

в) взять действительную часть полученного выражения.

Все настолько привыкли к комплексной форме, что часто пункты а) и в) пропускают.

Мы уже выполнили пункт а) переходом от формулы (21) к выражению (22). Теперь нашей задачей будет выяснение условий, при которых волны (22) и (23) являются решениями уравнений Максвелла (10) – (13). Для этого подставим выражения (22) и (23) в эти уравнения, но сначала выполним некоторые предварительные вычисления.

Чтобы сделать вычисления менее громоздкими, мы чуть-чуть забежим вперед и будем считать, что начальные фазы электрической и магнитной волны одинаковы,[3] и то-

---

[1] Это не обязательно, возможны и другие договоренности, например, можно иметь в виду мнимую часть.

[2] Напомню, что действительная часть комплексного числа z, записанного в экспоненциальной форме вычисляется на основании формулы Эйлера $\rho e^{i\alpha} = \rho\cos(\alpha) + i\rho\sin(\alpha)$.

[3] Если допущение о равенстве фаз не верно, то у нас ничего не получится.

гда их можно положить равными нулю, а вместо комплексных амплитуд использовать обычные $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$.

Вычислим дивергенцию $div\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\big)$ (см. (22)). Заметив, что например

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{\partial}{\partial x}\exp\big(ik_x x + ik_y y + ik_z z\big) = ik_x e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},$$

получаем

$$div\big(\boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(E_{0x}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(E_{0y}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(E_{0z}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\big) =$$

$$= (E_{0x}k_x + E_{0y}k_y + E_{0z}k_z)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},$$

Дивергенция плоской монохроматической волны

так что

$$div\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\big) = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0)e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

и

$$div\big(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\big) = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

С роторами придется поработать подольше, но как вычислить соответствующий детерминант мы уже понимаем и можем просто «угадать».

Ротор плоской монохроматической волны

$$rot\big(\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\big) = [\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0]e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\ ,$$

и

$$rot\big(\boldsymbol{B}_0 e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\big) = [\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0]e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

И уже совсем просто вычисляются производные по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)) = -i\omega\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)) = -i\omega\boldsymbol{B}_0 e^{-i\omega t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

Все подставляем в уравнения Максвелла (10) – (13), сокращаем[1] и получаем следующую систему.

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0) = 0,$$

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0) = 0,$$

$$[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0] = \omega\boldsymbol{B}_0 \qquad (24)$$

$$[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0] = -\frac{\omega}{v^2}\boldsymbol{E}_0. \qquad (25)$$

Если удовлетворить этим соотношениям, то волны (22) и (23) – решения системы уравнений Максвелла, причем все полученные из анализа этой системы условия – обязательные.

[1] Если бы множители $e^{-i\omega t}$ и $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ не сократились, пришлось бы сделать заключение, что волны (22) и (23) не являются решениями уравнений Максвелла.

Два первых условия – лишние. Все, что они дают – ортогональность волнового вектора $\boldsymbol{k}$ амплитудам электрической $\boldsymbol{E}_0$ и магнитной $\boldsymbol{B}_0$ волны – следует и из соотношений (24) и (25). Поскольку, как мы помним из механики, волновой вектор показывает направление распространения волны, а векторы-амплитуды показывают направление колебаний, то *электромагнитные волны – поперечные*.

Из соотношений (24) и (25) видно также, что амплитуды $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ (т.е. плоскости колебаний электрического и магнитного векторов) взаимно перпендикулярны, причем обе формулы *согласованно*[1] показывают, что векторы $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ и $\boldsymbol{k}$ образуют правую ортогональную тройку.

Выяснив направления векторов, можно перейти к модулям:

$$kE_0 = \omega B_0$$

$$kB_0 = \frac{\omega}{v^2} E_0,$$

откуда получается соотношение для амплитуд

Соотношение амплитуд электрической и магнитной волн.

$$E_0 = vB_0 \qquad (26)$$

и обычная для фазовой скорости волн формула

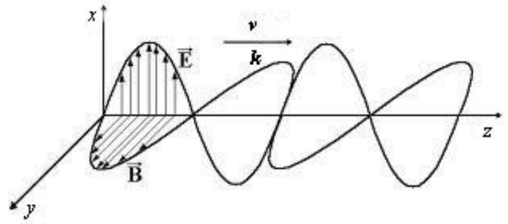
$$v = \omega/k. \qquad (27)$$

Последнюю формулу, вводя длину волны $\lambda = 2\pi/k$ и период колебаний $T = 2\pi/\omega$, можно переписать так:[2]

$$v = \lambda/T.$$

Это значит, что волна пробегает путь, равный своей

Мгновенная картина э.м. волны



длине, как раз за период колебаний. На рисунке приведена мгновенная картина волны. С течением времени вся картина как целое смещается вправо со скоростью v.

Сделаем одну очень важную для дальнейшего оценку. Пусть точечный заряд q движется со скоростью u в вакууме[3] в поле электромагнитной волны. Максимальная элек-

---

[1] Вспомним наш разговор о симметрии и небольшой, но необходимой асимметрии. Если бы производные по времени входили в уравнения Максвелла с одним знаком, то соотношения (24) и (25) противоречили бы друг другу, т.е. электромагнитные волны были бы невозможны.

[2] Обратим внимание, что волновое число k играет роль *частоты в пространстве*, а длину волны можно назвать *пространственным периодом*.

[3] Это просто для того, чтобы в оценку явно входила скорость c: формула (26) в вакууме имеет вид $E_0 = cB_0$.

трическая сила, действующая на него, есть $F_E = qE$, а магнитная (по формуле (26)) – $F_M = quB = quE/c$, так что $\frac{F_M}{F_E} = \frac{u}{c}$. Таким образом, роль магнитной силы в обычных условиях пренебрежимо мала.[1] Именно поэтому в оптике все внимание обращено на взаимодействие *электрического* поля с веществом, а вектор $\boldsymbol{E}$ часто называют *световым вектором.*

Световой вектор

Смысл динамических[2] уравнений Максвелла (12) и (13) заключается в том, что изменяющиеся во времени поля порождают друг друга непосредственно в окрестности точки, где это происходит. Пусть, например, по проводу прошел импульс тока. В первый момент времени появляется магнитное поле непосредственно вблизи тока; это магнитное поле порождает электрическое поле, которое, с одной стороны, появляется чуть дальше, а с другой – препятствует исходному току (вспомним правило Ленца). Это электрическое поле вновь порождает магнитное поле чуть дальше, причем это магнитное поле в предыдущей точке пространства «гасит» старое магнитное поле. Новое магнитное поле порождает новое электрическое и т.д.

Таким образом, в пространстве бежит электромагнитная волна-импульс. Мы видим, что справедливой оказывается концепция близкодействия: магнитная и электрическая волна «подстегивают» друг друга, распространяясь от области первичного возмущения.

Энергия элнектромагтнитной волны

Мы уже имели дело с плотностью энергии электрического и магнитного поля, но не могли ответить на вопрос, действительно ли вся электромагнитная энергия заключена именно в поле. Ответ дают уравнения Максвелла. Для распространения и поддержания волн необходима энергия в

---

[1] Магнитное поле тоже проявляет себя, но в очень тонких эффектах, например, в том, что свет оказывает (ничтожное) давление на тела. Первым это давление изучил П.Н. Лебедев.
[2] Т.е. уравнений, определяющих развитие процесса во времени.

любой точке пространства, хотя подчерпнуть ее можно только в источнике, откуда они распространяются.

Сто лет назад[1] для приема сигналов радиостанций использовались детекторные приемники, работавшие целиком на энергии приходящей волны; в них не было никаких усилителей, никаких источников питания - но звук в наушниках был!

Полная плотность энергии электромагнитного поля, как мы знаем, состоит из двух частей – электрической и магнитной:

Плотность энергии электромагнитного поля

$$w = w_E + w_M = \frac{\boldsymbol{ED}}{2} + \frac{\boldsymbol{HB}}{2}. \qquad (28)$$

В плоской монохроматической электромагнитной волне обе эти части одинаковы по величине. В самом деле, используя соотношение амплитуд (26) и формулу для фазовой скорости v (14), имеем при наших материальных соотношениях (9)

$$\frac{\boldsymbol{HB}}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{E^2}{2v^2\mu\mu_0} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\boldsymbol{ED}}{2}.$$

Выпишем явно плотность энергии плоской монохроматической волны через амплитуду поля $\boldsymbol{E}_0$ [2], используя формулу (21):

Плотность энергии плоской электромагнитной волны

$$w = 2w_E = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \varphi_{0E}). \qquad (29)$$

Среднее значение плотности энергии получаем согласно Лекции 0:

$$< w >= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2. \qquad (30)$$

Плотность потока энергии. Вектор Умова – Пойнтинга

Мы знаем (Лекция 0), что если есть плотность чего-то распространяющегося в пространстве, то должна быть и плотность потока, вычисляемая по формуле «плотность на скорость». В нашем случае плоской монохроматической волны должно быть

[1] Такие приемники находили применение вплоть до 30-х и 40-х годов двадцатого века.
[2] Комплексную запись не годится, поскольку операция не линейна.

$$wv = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}} \frac{\boldsymbol{k}}{k} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2 \frac{\boldsymbol{k}}{k}.$$

Здесь $\frac{\boldsymbol{k}}{k}$ – просто единичный вектор в направление распространения волны. Модуль этого выражения совпадает с произведением EH. Мы это увидим, как только получим полезное соотношение между амплитудами векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в плоской монохроматической волне:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu\mu_0} = \frac{E_0\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}}{\mu\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0. \qquad (31)$$

Это все не случайно, потому что плотность потока энергии в общем случае дается *вектором Умова – Пойнтинга*:

Вектор Умова – Пойнтинга

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

Он, как мы видим, и по величине разумен и для плоской монохроматической волны – по направлению.

Плотность w и плотность потока энергии $\boldsymbol{S}$ должны быть связаны уравнением непрерывности (как, например, плотность заряда и плотность тока):[1]

$$div(\boldsymbol{S}) = -\partial w/\partial t. \qquad (32)$$

Проверим это соотношение.[2] Но сначала сделаем маленькое отступление.

Посмотрим на формулу дифференцирования произведения двух функций

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

и введем вместо одного оператора дифференцирования два «недоделанных» оператора, один из которых $\frac{d}{dx_f}$ дифференцирует только функцию $f(x)$, а другой $\frac{d}{dx_g}$ – только функцию $g(x)$. Тогда правило дифференцирования произведения функций можно представить как действие суммы этих двух операторов:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx_f} + \frac{d}{dx_g}.$$

Этот прием оказывается очень эффективным при работе с операторами векторного анализа. Представим оператор $\boldsymbol{\nabla}$ в виде суммы

[1] Мы рассматриваем свободное пространство, в котором нет энергетических потерь, например, на джоулево тепло (просто потому, что нет тока проводимости).

[2] Эта проверка не может быть *доказательством* того, что вектор Умова – Пойнтинга действительно есть плотность потока энергии потому, что уравнение (32) будет выполняться и для других векторов, отличающихся от $\boldsymbol{S}$ вектором, дивергенция которого равна нулю. Однако в настоящее время это принято на основе других теоретических и экспериментальных данных.

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}_{\text{E}} + \boldsymbol{\nabla}_{\text{H}}.$$

Оператор $\boldsymbol{\nabla}_{\text{E}}$ действует только на поле $\boldsymbol{E}$ (поле $\boldsymbol{H}$ для него как бы константа), а оператор $\boldsymbol{\nabla}_{\text{H}}$ – только на поле $\boldsymbol{H}$.[1] Итак, вычислим дивергенцию вектора Умова Понйтинга

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] = (\boldsymbol{\nabla}_{\text{E}} + \boldsymbol{\nabla}_{\text{H}}) \cdot [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}].$$

Первая часть (с оператором-«недотепой» $\boldsymbol{\nabla}_{\text{E}}$) вычисляется совсем легко циклической перестановкой в смешанном произведении, поскольку вектор $\boldsymbol{H}$ можно вынести из-под оператора $\boldsymbol{\nabla}_{\text{E}}$:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\text{E}} \cdot [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] = \boldsymbol{H} \cdot [\boldsymbol{\nabla}_{\text{E}} \times \boldsymbol{E}] = -\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Мы использовали уравнение Максвелла (12). В оставшейся части надо сначала поменять местами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\text{H}} \cdot [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] = -\boldsymbol{\nabla}_{\text{H}}[\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}] = -\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\nabla}_{\text{H}} \times \boldsymbol{H}] = -\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

Здесь пригодилось уравнение (13). Окончательно

$$div[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] = -\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \qquad (33)$$

Посмотрим:

$$\frac{\partial\left(\frac{\boldsymbol{ED}}{2}\right)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

поскольку $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$. Аналогично преобразуется и производная $\frac{\partial\left(\frac{\boldsymbol{HB}}{2}\right)}{\partial t}$. Поэтому производную по времени от плотности энергии (28) можно привести к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Сравниваем последнее равенство с равенством (33) и получаем *теорему Умова – Пойнтинга* (32) для свободного пространства.

Как не запоминать, но знать формулы векторного анализа

Вернемся на минутку к плоской монохроматической волне и вычислим для нее модуль вектора Умова – Пойнтинга

$$|\boldsymbol{S}| = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \varphi_{0E}) =$$
$$= \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \varphi_{0E}).$$

и его среднее значение

[1] Получаемые этим формулы всегда верны, что позволяет их не помнить, но, по-видимому, доказательство их должно быть основано на первых принципах.

$$< |\boldsymbol{S}| >= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_0^2. \qquad (34)$$

Если положить $\mu = 1$, то это формулу можно привести к виду

$$< |\boldsymbol{S}| >= \frac{1}{2}nc\varepsilon_0 E_0^2. \qquad (35)$$

Эту формулу часто предлагают для интенсивности света в оптике, о чем пойдет речь в следующей лекции. Здесь только подчеркнем, что

Физический смысл модуля вектора Умова - Пойнтинга

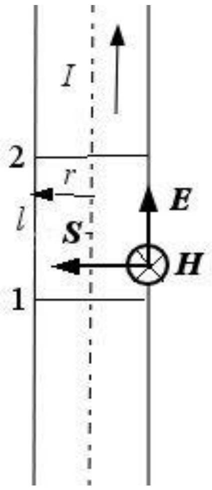
модуль вектора Умова – Пойнтинга имеет смысл энергии, падающей в единицу времени на единичную площадку, перпендикулярную направлению ее распространения. Размерность этой величины есть Вт/м**²**.

Если в пространстве распространяются несколько волн, то **сначала вектора *E* и *H* нужно найти по принципу суперпозиции,** а лишь затем вычислять вектор Умова – Пойнтинга и всякие там его средние значения.

Заканчивая разговор о векторе Умова – Пойнтинга, я приведу один очень интересный пример.

Распространение энергии э.м. поля вдоль проводника с током

Пусть по цилиндрическому проводнику радиуса r



протекает ток I как показано на рисунке. Выделим отрезок этого проводника длиной l от сечения 1 до сечения 2. Пусть разность потенциалов между этими равна U, так что модуль электрического поля [1] $E = U/l$. Возьмем какую-нибудь точку на поверхности проводника (см. рис.). Поле $\boldsymbol{E}$ в выбранной точке направлено вверх, а напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ – от нас, причем $H = I/2\pi r$. Таким образом, вектор Умова – Пойнтинга направлен *внутрь* проводника с током. Что бы это значило? Вспомнив смысл модуля этого вектора, подсчитаем полную энергию, поступающую в единицу времени внутрь выделенного отрезка проводника:

$$EH2\pi rl = \frac{U}{l}\frac{I}{2\pi r}2\pi rl = UI = I^2R,$$

[1] Это то самое электрическое поле из закона Ома $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$.

где R – сопротивление этого участка. Это значит, что энергия, идущая на нагрев проводника, поступает через его боковую поверхность из окружающего пространства.

Если рассмотреть неоднородный участок, где действует сторонняя сила, то окажется, [1] что энергия $\mathcal{E}I$ вытекает из него в единицу времени в окружающее пространство. Таким образом, когда мы замыкаем цепь, электромагнитная волна начинает распространяться от источника, приводя в движение носители тока, нагревая, к сожалению, проводник, но одновременно делая и уйму полезных дел. Именно поэтому лампочка в Санкт-Петербурге загорается почти мгновенно, если включить рубильник в Москве – электромагнитное поле распространяется со скоростью света.

[1] Это несложно сделать самостоятельно.