Магнитное поле в веществе

Эта лекция представлена в неокончательном виде. Первые два параграфа уйдут в предыдущую лекцию, а материал о магнитном поле в веществе будет дополнен.

Сила Ампера

На движущийся со скоростью $\boldsymbol{u}$ заряд в магнитном поле $\boldsymbol{B}$ действует сила

$$\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}].$$

Ток в проводнике – движущиеся направленно заряды. На них действует магнитная сила, перпендикулярная скорости. Заряды не могут выйти из проводника и оказывают давление на решетку. В результате суммарная магнитная сила оказывается приложенной к самому проводнику. Эта сила называется силой Ампера.

Согласно сказанному, сила Ампера, действующая на объем тока dV, есть [1]

Сила Ампера

$$\delta\boldsymbol{F}_A = q[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}]ndV = [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}]dV. \qquad (1)$$

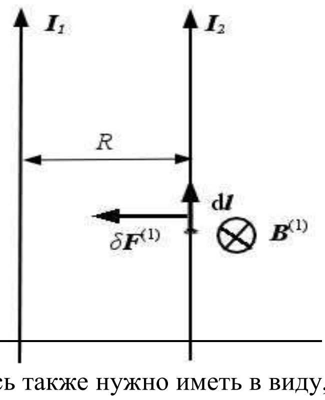
Для линейного тока $dV = Sdl$, вновь можно поменять местами $\boldsymbol{j}$ и dl, и поскольку $jS = I$, то

Сила Ампера, действующая на элемент линейного тока

$$\delta\boldsymbol{F}_A = I[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}]. \qquad (2)$$

Силу, действующую на произвольный конечный отрезок линейного проводника, найдем интегрированием по этому отрезку.[2]

В качестве примера рассмотрим взаимодействие двух параллельных бесконечных прямолинейных проводников с токами I_1 и I_2, находящимися на расстоянии R друг о друга. Индукция магнитного поля, создаваемого первым током, в любой точке вто-



[1] Здесь также нужно иметь в виду, что место уходящих из объема dV носителей тока занимают другие заряды.

[2] Формулу (2) (впрочем, и формулу (1) тоже) в наши дни часто называют законом Ампера. Мы сохраним это историческое название за формулой силы взаимодействия между двумя параллельными прямыми токами (см. ниже).

рого проводника направлена «от нас» (см. рис.) и по величине есть

$$B^{(1)} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}. \qquad (3)$$

Выделим элемент второго проводника $d\boldsymbol{l}$. Формула (2) показывает, что сила, действующая на этот элемент $\delta\boldsymbol{F}^{(1)}$ направлена к первому проводнику, и

$$\delta F^{(1)} = I_2 B dl,$$

так что (с учетом формулы (3))

$$\frac{\delta F^{(1)}}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}. \qquad (4)$$

Закон Ампера

Рамка с током в магнитном поле

Магнитный диполь

Рамка с током – замкнутый контур с током, который мы будем считать плоским (может быть и потому, что он достаточно мал). Сила, действующая на рамку с током в магнитном поле с индукцией $\boldsymbol{B}$**,** вычисляется интегрированием формулы (2):

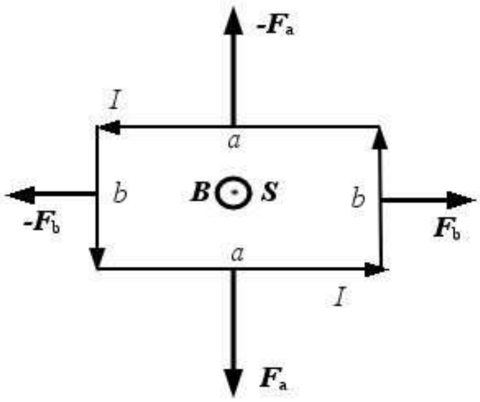
$$\boldsymbol{F} = \oint I[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}].$$

В однородном магнитном поле эта сила равна нулю:

$$\boldsymbol{F} = I[(\oint d\boldsymbol{l}) \times \boldsymbol{B}] = 0,$$

Результирующая сила, действующая на рамку с током в однородном магнитном поле равна нулю

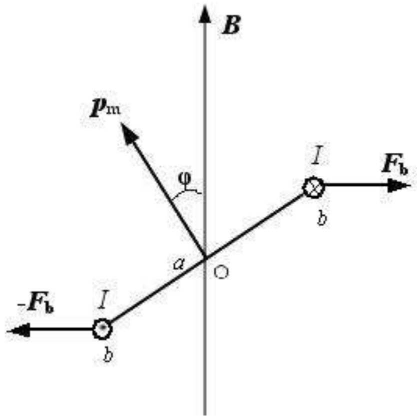
что и иллюстрирует рисунок для прямоугольной рамки со сторонами a и b.



Во всех случаях, когда идет речь о замкнутом контуре с током, сначала нужно выбрать положительное направление его обхода (показывают стрелки на рисунке), этим определяется направление нормали к поверхности, границей которой служит этот контур (данном случае «на нас»). Видно, что силы Ампера просто растягивают рамку.

Если поле однородно, то в ситуации на рисунке величину силы, например, действующей на сторону b, можно записать так:

$$F_b = IbB. \qquad (5)$$



Даже в однородном магнитном поле на рамку с током действует механический момент сил. Учитывая формулу (5) и замечая, что плечо пары равно $a \cdot \sin(\varphi)$, получаем для момента этой пары

$$M = IabB\sin(\varphi) = ISB\sin(\varphi).$$

Учитывая направления поля и сил, можно переписать последнее равенство в векторном виде:

$$\boldsymbol{M} = I[\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B}].$$

Магнитным моментом рамки с током называется вектор

$$\boldsymbol{p}_m = I\boldsymbol{S}.[1]$$

Магнитный дипольный момент

Используя это определение, запишем выражение для механического момента в окончательной форме

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{B}]. \qquad (6)$$

Механический момент, действующий на рамку с током

Эта формула оказывается верной для плоской рамки произвольной формы, если только можно пренебречь изменением индукции $\boldsymbol{B}$ в ее пределах.

Механический момент, действующий на рамку с током, стремится установить магнитный момент *по полю* $\boldsymbol{B}$, при этом плоскость рамки оказывается ему перпендикулярной. Таким образом, положение устойчивого равновесия задается условием $\boldsymbol{p}_m \uparrow\uparrow \boldsymbol{B}$.

Вычислим, наконец, механическую энергию[2] рамки с током в магнитном поле через работу, которую должны совершить внешние силы, чтобы повернуть ее на угол φ от положения равновесия:

---

[1] Обратим внимание, что согласно уже сказанному направление векторов $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{p}_m$ жестко связано с выбранным направлением положительного обхода рамки.

[2] Здесь подчеркивается, что речь идет о механической энергии, потому что с прохождением тока в рамке связана, как мы увидим чуть позже, магнитная энергия. В частности, при повороте рамки нужно совершать дополнительную работу, чтобы поддерживать ток в ней постоянным.

$W + const = A^{\checkmark} = \int_0^{\varphi} Md\varphi = \int_0^{\varphi} p_m B sin(\varphi) d\varphi = p_m B(1 - \cos(\varphi)).$

Выбрав константу, равной слагаемому $p_m B$, окончательно получим

Механическая энергия рамки с током в магнитном поле

$$W = -\boldsymbol{p}_m \cdot \boldsymbol{B}. \quad (7)$$

Сравним теперь поведение рамки с током в магнитном поле (формулы (6) и (7)) с поведением электрического диполя в электрическом поле (формулы (13) и (14) Лекции 2). Видно, что выглядят они одинаково, поэтому рамка с током – аналог электрического диполя – называется магнитным диполем.

Магнитный диполь.

Магнитное поле в веществе

Вообще говоря, намагничение вещества (аналог поляризации диэлектриков) – эффект чисто квантовый. Существует теорема Бора – ван Лёвена, утверждающая, что в классической теории оно не возможно в состоянии термодинамического равновесия. Однако некоторые моменты мы попробуем описать.

Каждая электронная орбита в атоме представляет собой микроскопический магнитный диполь – «рамку с током $I = e/T$» [1] – и обладает дипольным магнитным моментом. При включении магнитного поля электрон приобретает дополнительную угловую скорость такую, что соответствующий ей магнитный момент направлен против вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$. [2]

В отсутствие магнитного поля магнитные моменты электронных орбит в атоме весьма сложным образом складываются друг с другом и с собственными (спиновыми) магнитными моментами электронов. При этом возможны две ситуации.

Диамагнетики

1) Суммарный магнитный момент атома в отсутствие поля равен нулю. Намагничение при включении поля целиком определяется дополнительной угловой ско-

[1] Здесь T – период обращения электрона по орбите.
[2] Мы в этом убедимся при изучении явления электромагнитной индукции.

ростью, приобретаемой электронами. Такое вещество называется *диамагнетиком*, и для него $\boldsymbol{p}_m \uparrow\downarrow \boldsymbol{B}$.

2) Суммарный магнитный момент атома в отсутствие поля **не** равен нулю. Магнитное поле частично упорядочивает эти магнитные моменты. В результате средний момент атомов оказывается направленным по полю.[1] Такое вещество называется *парамагнетиком*, и для него $\boldsymbol{p}_m \uparrow\uparrow \boldsymbol{B}$.

Парамагнетики

Вектором намагниченности называется сумма магнитных моментов в физически бесконечно малом объеме dV, отнесенная к этому объему: [2]

Вектор намагниченности или намагниченность

$$\boldsymbol{J} = \frac{\sum_{dV} \boldsymbol{p}_m}{dV}. \quad (8)$$

При не слишком сильных магнитных полях величина намагниченности пропорциональна величине магнитного поля. По историческим причинам эту пропорциональность записывают так:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\chi}{(1+\chi)\mu_0}\boldsymbol{B}, \quad (9)$$

где величина χ называется *магнитной восприимчивостью*. Для диамагнетиков $\chi < 0$, и $|\chi| \sim 10^{-5} - 10^{-7}$, для парамагнетиков $\chi > 0$, и $|\chi| \sim 10^{-4} - 10^{-6}$.

Магнитная восприимчивость

С микроскопическими токами всегда связан магнитный момент, но хотя обратное не верно, удобно считать, что и любому микроскопическому моменту соответствует микроскопический ток.

Микроскопические токи накладываются друг на друга и порождают макроскопические *молекулярные* токи $I^{\text{мол}}$, вообще говоря, как поверхностные, так и объемные. Их надо учитывать в теореме о циркуляции вектора магнитной индукции [3] наряду с токами проводимости $I^{\text{пров}}$:

Молекулярные токи

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\left(\sum I^{\text{пров}} + \sum I^{\text{мол}}\right). \quad (10)$$

Далее для токов проводимости мы не будем использовать каких-либо индексов, т.е. просто писать I и $\boldsymbol{j}$, а молекулярные токи обозначать штрихами (например, $\boldsymbol{j}'$ - плотность молекулярных токов).

[1] Этот ориентационный эффект «побеждает» наведенный диамагнетизм, описанный в 1).
[2] Сравните это определение с определением вектора поляризации.
[3] Именно это мы имели в виду, когда писали $I^{\text{все}}$ в этой теореме.

Вектор намагниченности связан с молекулярными токами теоремой о циркуляции:

Теорема о циркуляции намагниченности

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum I', \qquad (11)$$

где, как обычно, имеются в виду токи охватываемые контуром Г. Подставляя сумму молекулярных токов из теоремы (11) в формулу (10) и чуть-чуть преобразуя, получаем

$$\oint_\Gamma \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{J}\right) \cdot d\boldsymbol{l} = \sum I. \qquad (12)$$

Еще раз: справа стоит сумма токов *проводимости*, охватываемых контуром Г.

Вектор

Напряженность магнитного поля

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{J} \qquad (13)$$

называется *напряженностью магнитного поля*. Его роль в теории магнитных полей аналогична роли вектора электрического смещения $\boldsymbol{D}$ в теории электрических полей: он позволяет исключать трудные расчеты молекулярных токов.

Формула (12) принимает вид

Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum I \qquad (14а)$$

или

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad (14б)$$

где S – поверхность, границей которой служит замкнутый контур Г.

Используя формулу (9), имеем

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \frac{\chi \boldsymbol{B}}{(1+\chi)\mu_0} = \frac{\boldsymbol{B}}{(1+\chi)\mu_0}.$$

Величина

$$\mu = (1 + \chi)$$

называется магнитной проницаемостью среды, а связь между векторами $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ можно записать так:

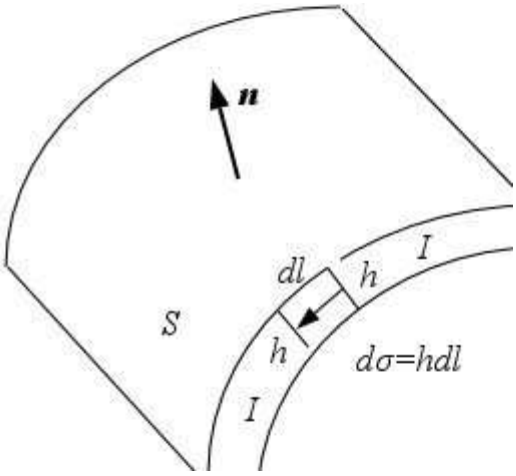
Связь между векторами $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{B} = \mu\mu_0 \boldsymbol{H}. \qquad (15)$$

Поверхностный ток

Для тех случаев, когда заряд располагается в бесконечно узком в физическом смысле приповерхностном слое, мы используем понятие поверхностной плотности зарядов.

Сейчас мы введем понятия поверхностного тока и поверхностной плотности тока. Для этого рассмотрим узкий при-



поверхностный слой толщины h поверхности S, по которой течет ток I. Запишем, как обычно, ток δI через площадку $d\boldsymbol{\sigma}$ поперечного сечения этого слоя через плотность тока:

Поверхностная плотность тока

$$\delta I = \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = j_k d\sigma.$$

Здесь $d\boldsymbol{\sigma} = d\sigma \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}$ – единичная нормаль к площадке $d\sigma$.[1]Площадь сечения $d\sigma = hdl$, где dl – элемент длины, смысл которого ясен из последней формулы и рисунка, так что

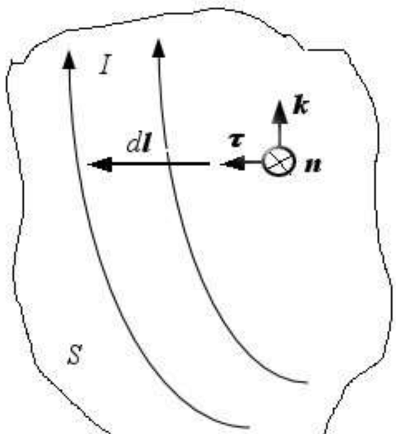
$$\delta I = j_k h dl.$$

Если $h \to 0$ так, что произведение $j_k h$ остается конечным, то говорят, что по поверхности протекает *поверхностный* ток, а величину

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} h \ (h \to 0, j \to \infty)$$

называют линейной плотностью тока. При этом

$$\delta I = i_k dl. \qquad (16)$$



Можно сказать, что линейная плотность тока есть ток, протекающий через единичный линейный элемент поверхности, если этот элемент перпендикулярен вектору $\boldsymbol{i}$.

Соотношение (16) можно записать в векторной форме, если считать элемент $d\boldsymbol{l}$ вектором[2] и ввести единичную нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности S в точке его расположения (см. рис.):

$$\delta I = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} dl = \boldsymbol{i} \cdot [\boldsymbol{n} \times d\boldsymbol{l}]. \qquad (17)$$

---

[1] Обычно мы пишем $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$, но обозначения S зарезервировано для рассматриваемой поверхности и нормали к ней.

[2] Этот вектор касателен к поверхности S.

Для дальнейшего введем еще единичный вектор вдоль элемента $\boldsymbol{dl}$:

$$\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{l}/dl. \qquad (18)$$

Вектора $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{k}$ касательны к поверхности S, и

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{k}]. \qquad (19)$$

Условия на границе двух сред

Выясним, как изменяется магнитное поле на границе двух магнетиков. [1]

Для нормальных составляющих $\boldsymbol{B}_{1n}$ и $\boldsymbol{B}_{2n}$ магнитной индукции в первой и второй среде соответственно из теоремы о потоке

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

сразу получаем [2]

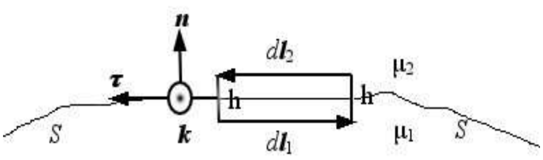
$$\boldsymbol{B}_{1n} = \boldsymbol{B}_{2n}, \qquad (20)$$

Нормальная составляющая вектора магнитной индукции всегда непрерывна

а для напряженности магнитного поля, используя соотношение (15), –

$$\mu_1 \boldsymbol{H}_{1n} = \mu_2 \boldsymbol{H}_{2n}. \qquad (21)$$

Обратимся теперь к проекциям магнитного поля на касательную плоскость к поверхности раздела в некоторой точке. [3]Рассмотрим, например, вектор напряженности магнитного поля. Выберем на поверхности S произвольный вектор $\boldsymbol{dl}$ (он, конечно, касателен к этой поверхности, см. предыдущий рисунок), а в плоскости векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{dl}$ возьмем прямоугольный контур такой, чтобы



отрезок $\boldsymbol{dl}_1$ находился в первой среде (причем $\boldsymbol{dl}_1 \uparrow\downarrow \boldsymbol{dl}$), а отрезок $\boldsymbol{dl}_2$ – во второй (и $\boldsymbol{dl}_2 \uparrow\uparrow \boldsymbol{dl}$), как это показано на рисунке. Направление обхода контура задается векторами

---

[1] Магнетик – любое вещество, рассматриваемое с точки зрения его магнитных свойств.

[2] Обязательно вернитесь к выводу формулы (10) Лекции 3.

[3] Часто говорят о «тангенциальных составляющих», что не совсем точно. Мы получим соотношения для проекций векторов на любое направление в касательной плоскости. Тангенциальные составляющие лежат в плоскостях, содержащих как сам вектор, так и нормаль к поверхности, а такие плоскости в первой и второй среде, вообще говоря, могут не совпадать.

$d\boldsymbol{l}_1$ и $d\boldsymbol{l}_2$. Устремим расстояние h к нулю, так что поверхность S оказывается зажатой между векторами $d\boldsymbol{l}_1$ и $d\boldsymbol{l}_2$. В циркуляции вектора $\boldsymbol{H}$ остаются только вклады по бесконечно малым отрезкам $d\boldsymbol{l}_1$ и $d\boldsymbol{l}_2$, так что интегрирование можно снять. Ток, охватываемый контуром, дается формулой (17). Таким образом теорема о циркуляции (14) принимает вид

$$\boldsymbol{H_1} \cdot d\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{H}_2 d\boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} dl.$$

Если, как и раньше, ввести единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ вдоль направления $d\boldsymbol{l}$ (18)

$$\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{l}/dl,$$

то последнее равенство можно переписать, сокращая на dl, так

$$-\boldsymbol{H_1} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}, \qquad (22)$$

или, вводя проекции на направления $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{k}$,

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_k. \qquad (23)$$

Соотношение для проекций вектора $\boldsymbol{H}$ на касательную плоскость

Таким образом, скачок проекции вектора $\boldsymbol{H}$ на некоторое направление $\boldsymbol{\tau}$ в касательной к поверхности раздела плоскости определяется проекцией линейной плотности тока на направление $\boldsymbol{k}$, причем $\boldsymbol{k} = [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}]$ (см. (19)).[1]

Проще всего использовать соотношение (23), если выбрать отрезок $d\boldsymbol{l}$, перпендикулярный току, так как в этом случае в правой части (23) будет стоять просто алгебраическая величина плотности тока i.

Соотношение (23) иногда удобно записывать в векторной форме. Подставив $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}]$ в формулу (22) и воспользовавшись циклической перестановкой в смешанном произведении, получаем

$$[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_2] \cdot \boldsymbol{k} - [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_1] \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}.$$

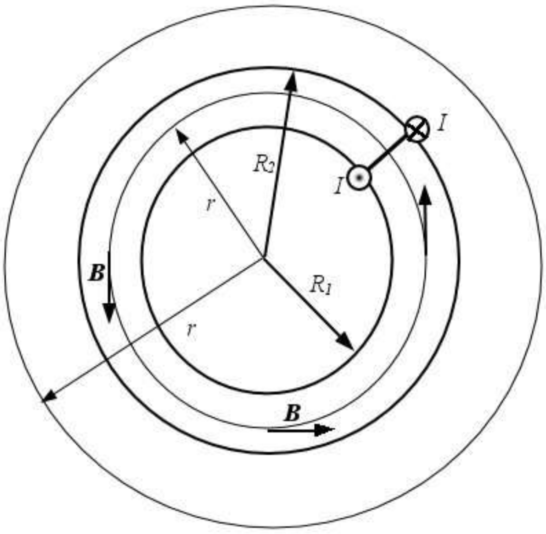
Вектор $\boldsymbol{k}$ произволен вместе с вектором $\boldsymbol{\tau}$, поэтому

$$[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_2] - [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_1] = \boldsymbol{i}. \qquad (24)$$

[1] Напомню, что вектор $\boldsymbol{k}$ также лежит в касательной плоскости и перпендикулярен выбранному направлению $\boldsymbol{\tau}$.

Магнитное поле тороида и соленоида

Сначала займемся тороидом. Он представляет собой плотно, виток к витку, намотанную на тор катушку с током (этакий бублик, обмотанный проводом). Пусть I – ток, протекающий по обмотке, R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы тора равны соответственно, N – полное число витков, l – длина средней лини тора, так что плотность витков есть $n = N/l$. Пространство внутри тора заполнено магнетиком с магнитной восприимчивостью μ. На рисунке показ только один виток с током.



Мы собираемся воспользоваться теоремой о циркуляции для вектора напряженности магнитного поля, и сначала надо угадать форму его линий. Во-первых, они должны быть замкнутыми, во вторых, сохранять симметрию задачи. Становится ясно, что линии магнитного поля – окружности с центром на оси тора (на рис. показаны более тонкими линиями с радиусами r). Циркуляция вектора $\boldsymbol{H}$ по любой такой окружности равна, очевидно, $H \cdot 2\pi r$.

Если в качестве вспомогательного контура взять линию поля с радиусом $r < R_1$, то он не будет охватывать никаких токов, поэтому по теореме о циркуляции (14)

$H = 0,$ если $r < R_1$.

Теперь возьмем окружность радиуса r такого, что $R_1 < r < R_2$ (в «тесте» бублика). Мысленно натянем на нее мембранку и видим что ток I пересекает ее N раз в одном направлении. Применяя теорему о циркуляции, получаем

$H \cdot 2\pi r = NI$

или (с учетом (15))

$B = \mu\mu_0 NI/2\pi r,$ если $R_1 < r < R_2$. (25)

Магнитное поле внутри тороида

Наконец, вспомогательный контур-окружность выберем так, чтобы он проходил вне тороида, $r > R_2$. Здесь возможны два случая. Если натянутая на контур мембранка не пересекает тороид, то, как и в случае $r < R_1$ сразу получаем, что $H = 0$. В противном случае каждый виток пересекает ее дважды – один раз с положительным и один раз с отрицательным током, так что сумма охватываемых токов равна нулю. Таким образом

$$H = 0, \text{если } r > R_2.$$

Теперь обратимся к соленоиду. Это тоже катушка, плотно намотанная, но на цилиндр. Нас будет интересовать соленоид «бесконечной» длины, т.е. достаточно длинный, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами.

Сначала заметим, что на оси тороида формула (25) приводит к результату (см. здесь)

Поле внутри длинного соленоида

$$B = \mu\mu_0 nI \tag{26}$$

Если устремить радиус тороида к бесконечности, причем так, чтобы

$$R_2 - R_1 = const, \; n = const,$$

то «бесконечный» тороид будет не отличим от «бесконечного» соленоида, поэтому формула (26) дает поле внутри длинного соленоида. Области $r < R_1$ и $r > R_2$ тороида превращаются во внешние области соленоида, так что поле снаружи соленоида отсутствует.

Наконец, линии-окружности магнитного поля тороида при таком предельном переходе превращаются в прямые линии, что, наряду с формулой (26), говорит о том, что магнитное поле внутри соленоида – *однородное*.

Другой способ определения магнитного поля соленоида, использующий прямоугольный вспомогательный контур, приведен во всех учебниках. Настоятельно советую посмотреть его. Обратите внимание, что при этом необходимо априорное знание того, что поле вне соленоида равно нулю. Приводимые обычно соображения о «бесконечной энергии» мне кажутся неубедительными (вспомним хотя бы электрическое поле бесконечной плоскости).