Движение зарядов в электрических и магнитных полях

Динамика точечного заряда q в электрических и магнитных полях определяется силой Лоренца

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{F}_M,$$ Сила Лоренца

где

$$\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E} \text{ – электрическая,} \tag{1}$$

а

$$\boldsymbol{F}_M = q[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \text{ – магнитная сила.} \tag{2}$$

Здесь мы рассмотрим только три случая.

Однородное магнитное поле

Прежде всего, запомним, что магнитная сила (сила Лоренца в узком смысле) *никогда* не может совершать работу, поскольку она перпендикулярна скорости:

$$\delta A = q[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \cdot d\boldsymbol{l} = q[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{v}dt \equiv 0.$$

Разложим скорость $\boldsymbol{v}$ на две составляющие – параллельную полю $\boldsymbol{v}_\parallel$ и перпендикулярную ему $\boldsymbol{v}_\perp$. Сила (2) не имеет составляющей вдоль поля $\boldsymbol{B}$, поэтому

$$\boldsymbol{v}_\parallel = const.$$

Поскольку $q[\boldsymbol{v}_\parallel \times \boldsymbol{B}] = 0$, то магнитную силу можно переписать в виде

$$\boldsymbol{F}_M = q[\boldsymbol{v}_\perp \times \boldsymbol{B}].$$

Уравнение движения в плоскости, перпендикулярной полю, сводится к уравнению для нормальной составляющей ускорения

$$m{v_\perp}^2/R = qv_\perp B, \tag{3}$$

так что радиус кривизны R есть

$$R = mv_\perp/qB. \tag{4}$$

Поскольку правая часть этого равенства – константа,[1] то

$$R = const,$$

[1] Из-за того, что магнитная сила не совершает работы, не может изменяться модуль скорости $v_\perp$.

и движение в плоскости, перпендикулярной полю $\boldsymbol{B}$, представляет собой движение по окружности радиуса (4). Циклическая частота ω и период T получаются из соотношения (4):

Период вращения заряда в магнитном поле

$$\omega = v_{\perp}/R = qB/m, \quad (5)$$
$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Формулу (5) можно переписать в векторном виде. Ясно, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, как и поле $\boldsymbol{B}$, перпендикулярна рассматриваемой плоскости, поэтому либо $\boldsymbol{\omega} \uparrow\uparrow \boldsymbol{B}$, либо $\boldsymbol{\omega} \uparrow\downarrow \boldsymbol{B}$.Поскольку магнитная сила должна обеспечивать *центростремительное* ускорение, то

$$\boldsymbol{\omega} = -q\boldsymbol{B}/m. \quad (5а)$$

Формальный вывод выглядит так. Пусть $\boldsymbol{R}$ – вектор, проведенный из центра окружности к движущемуся заряду. Тогда векторный аналог уравнения (3) имеет вид

$$-m\omega^2\boldsymbol{R} = q[[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}] \times \boldsymbol{B}].$$

Раскрывая двойное векторное произведение по формуле «бац минус цаб»[1] и учитывая, что $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{R} = 0$, получаем

$$-m\omega^2 = q(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{B}),$$

откуда и следует формула (5а)..

Если скорость $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ не равна нулю, то с учетом движения вдоль направления поля $\boldsymbol{B}$ траектория заряда представляет собой винтовую линию с шагом

Шаг винтовой линии

$$h = v_{\parallel}T.$$

Параллельные электрическое и магнитное поля

Если оба поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ однородны, то единственно отличие от предыдущего случая заключается в том, что скорость $v_{\parallel}$ изменяется по закону

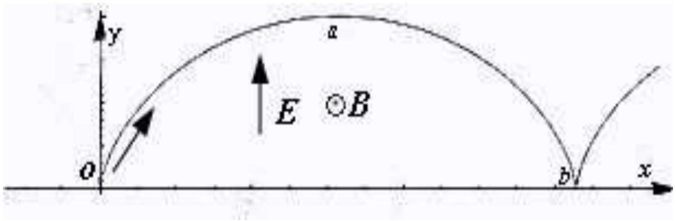
Переменный шаг

$$v_{\parallel} = v_{\parallel 0} + \ qEt.$$

[1] $[\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$. Отметим, что в тексте эту формулу можно использовать после замены порядка сомножителей во внешнем произведении, т.е. со знаком «минус».

Дрейф в скрещенных полях

Пусть однородное магнитное поле $\boldsymbol{B}$ направлено перпендикулярно однородному полю $\boldsymbol{E}$ (см. рис.), и точечный



заряд q первоначально покоится в начале координат O. В первый момент под действием электрического поля он приобретает скорость вдоль оси Oy, а магнитное поле начинает его закручивать по часовой стрелке, как это описано выше. Вплоть до точки a модуль скорости увеличивается, так как электрическое поле совершает положительную работу, однако далее начинается замедление, и из соображений симметрии можно ожидать, что заряд вновь остановится в точке b.

Далее все повторяется, и заряд движется «в среднем» вдоль оси Ox, т.е. перпендикулярно как вектору $\boldsymbol{E}$, так и Дрейф
вектору $\boldsymbol{B}$. Такое движение и называется *дрейфом в скрещенных полях*. Траектория, по которой движется заряд, называется циклоидой – эта та же кривая, которую описывает точка на ободе колеса, катящегося по поверхности без скольжения. [1]

В физике часто какая-либо догадка помогает резко упростить решение уравнения. Движение точки на ободе колеса складывается из двух движений: вращательного с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и поступательного со скоростью $\boldsymbol{u}$, так что полная скорость относительно поверхности есть

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}],$$

причем

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}], \ \boldsymbol{u} = const.$$

Предположим, что так же можно представить движение заряда q в скрещенных полях. Уравнение движения выглядит так:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E} + q[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \qquad (6)$$

или [2]

$$m\big[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}]\big] = q\boldsymbol{E} + q[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}] + q[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}] \times \boldsymbol{B}].$$

---

[1] Движению со скольжением соответствует движение заряда с ненулевой начальной скоростью.

[2] $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}]$.

Применяем формулу «бац минус цаб» и убираем скалярные произведения, равные нулю: [1]

$$-m\omega^2\boldsymbol{R} = q\boldsymbol{E} + q[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}] + q(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}. \qquad \textbf{(7)}$$

Члены, содержавшие переменный вектор $\boldsymbol{R}$ должны уничтожить друг друга, так что

$$-m\omega^2 = q(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{B}),$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = -q\boldsymbol{B}/m,$$

как и раньше (см. (5a)). Теперь можно найти и скорость дрейфа, умножая векторно два оставшихся слагаемых в соотношении (7) на вектор $\boldsymbol{B}$:

$$q[\boldsymbol{B}\times[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}]] = q[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}],$$

или (поскольку $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}) = 0$)

$$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]/\boldsymbol{B}^2.$$

Скорость дрейфа

Убедитесь на рисунке, что направление скорости дрейфа получилось правильное.

Приведенные вычисления верны в нерелятивистском приближении, когда $u \ll c$.

[1] такие как $(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{R})$ и $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{R})$.