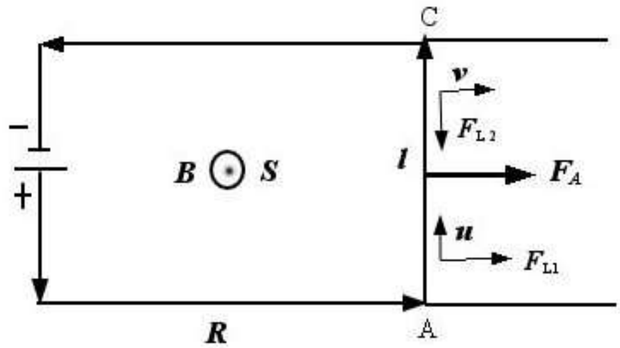
Работа силы Ампера

Напомню, что сила Ампера, действующая на элемент линейного тока $d\boldsymbol{l}$, дается формулой

$$\delta \boldsymbol{F}_A = I[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}]. \qquad (1)$$

Сила Ампера

Посмотрим на рисунок. По двум неподвижным горизонтальным проводникам (рельсам) может свободно перемещаться проводящий ползунок АС, которому соответствует вектор $\boldsymbol{l}$.



Все проводники образуют замкнутую цепь с током I, помещенную в магнитное поле $\boldsymbol{B}$. Положительное направление обхода указано стрелками на проводниках, и ему соответствует направление нормали к поверхности, натянутой на контур, показанное на рисунке вектором площади $\boldsymbol{S}$ («на нас»).[1] Вектор $\boldsymbol{R}$ задает положение ползунка, скорость которого $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{R}/dt$.

Будем считать поле однородным, тогда интегрирование соотношения (1) по отрезку $\boldsymbol{l}$ дает

$$\boldsymbol{F}_A = I[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}]. \qquad (2)$$

Если ток положителен и направление магнитного поля совпадает с направлением нормали,[2] то эта сила (см. рис.) направлена вправо. Еще заметим, что

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{l}] \qquad (3)$$

При движении проводника сила Ампера производит работу

$$\delta A = \boldsymbol{F}_A \cdot d\boldsymbol{R} = I[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}] \cdot d\boldsymbol{R} = I[d\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{l}] \cdot \boldsymbol{B} = Id\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Поскольку мы считаем поле однородным, то скалярное произведение $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}$ есть поток Φ вектора магнитной индукции, и производимую силой Ампера элементарную работу можно переписать так:

$$\delta A = Id\Phi. \qquad (4)$$

Элементарная работа силы Ампера

Пусть Φ_1 – поток вектора $\boldsymbol{B}$ в начальный, а Φ_2 – в конечный моменты времени. Тогда полная работа силы Ампера при постоянном токе есть

---

[1] Напомню, что $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n}$.

[2] На рисунке поле тоже направлено «на нас», но все последующие формулы верны для произвольного направления вектора $\boldsymbol{B}$.

Работа силы Ампера

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) для работы силы Ампера, выраженной через изменение потока магнитной индукции, оказываются справедливыми при любой деформации контура с током в магнитном поле.

На нашем рисунке при выбранных направлениях поля $\boldsymbol{B}$ и обхода контура и при положительном токе работа силы Ампера $\boldsymbol{F}_A \cdot d\boldsymbol{R}$ положительна, если проводник движется вправо. При этом, как легко проверить, поток магнитной индукции увеличивается, так что положительной оказывается и работа, вычисленная по формулам (4) и (5).

Наша картинка показывает, как энергия источника тока преобразуется в механическую работу, однако это еще не двигатель – нет цикличности процесса. Впрочем, это легко исправить, например, изогнув полозья так, чтобы получилось движение по окружности.

Если чуть-чуть задуматься о наших результатах, то неминуемо возникнет следующий вопрос. Сила Лоренца не может совершать работу, сила Ампера – сумма сил Лоренца, действующих на носители заряда. Как же получается, что она совершает работу?

Ответ очень прост. Если проводник движется, то в силу Ампера входят только части сил Лоренца. В самом деле, это $\boldsymbol{F}_{L1} = q[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}]$, где $\boldsymbol{u}$ – скорость заряда вдоль проводника с током (в нашем случае – $\boldsymbol{l}$), но есть еще другая составляющая силы Лоренца $\boldsymbol{F}_{L2} = q[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]$, где $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{R}/dt$ – скорость движения проводника. Суммарная работа этих двух составляющих равна нулю. В самом деле, используя свойство смешанного произведения, имеем

$$q[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{v}dt + q[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{u}dt = 0.$$

Сила $\boldsymbol{F}_{L1}$ направлена на нашем рисунке вправо, она и дает вклад в силу Ампера (см. рисунок). А что же делает сила $\boldsymbol{F}_{L2}$? Если считать, что носители тока имеют положительный заряд, то она направлена вниз, а поскольку в этом случае скорость $\boldsymbol{u}$ направлена в ползунке вверх (по току), то эта сила *препятствует току*, ее работа отрицательна. [1] Источнику ЭДС для поддержания тока приходится компенсировать эту работу.

Отрицательная работа силы Лоренца

Как мы видим, сила Лоренца играет хитрую роль: она одной «рукой» забирает энергию у источника ЭДС, а другой – совершает механическую работу.

Роль силы Лоренца

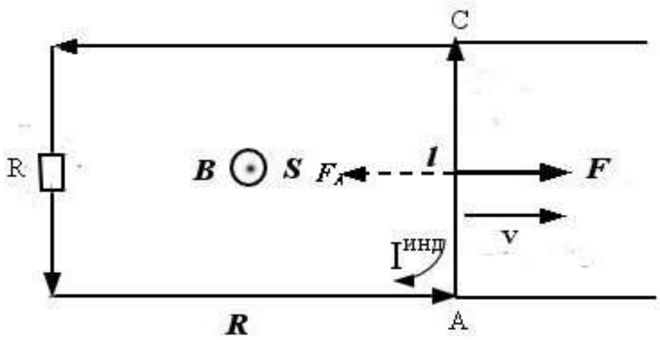
[1] Если заряд носителей тока отрицателен (электроны), то изменяется как направление силы, так и скорости $\boldsymbol{u}$, поэтому все выводы остаются такими же.

Электромагнитная индукция

ЭДС индукции при движении проводника в магнтном поле

«Вредная» для двигателя часть силы Лоренца $\boldsymbol{F}_{L2}$ представляет собой не что иное, как стороннюю силу, приводящей к отрицательной ЭДС.

Несколько изменим рисунок: уберем источник тока,



явно укажем сопротивление R и приложим внешнюю силу $\boldsymbol{F}$**,** под действием которой ползунок $\boldsymbol{l}$ приходит в движение.

Его скорость, как и раньше, обозначим $\boldsymbol{v}$**.**

Мы сохраняем все остальные условия предыдущего параграфа, так что поток вектора магнитной индукции увеличивается.

На носитель заряда действует сила Лоренца

Сила Лоренца – сторонняя сила

$$\boldsymbol{F}_{L2} = q[\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}],$$

это *сторонняя* сила и ее поле есть

$$\boldsymbol{E}^{\text{ст}} = \frac{\boldsymbol{F}_{L2}}{q} = [\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}].$$

ЭДС этой силы называется *ЭДС индукции* и вычисляется по определению:

ЭДС индукции

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = \int_l \boldsymbol{E}^{\text{ст}} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_l [\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \cdot d\boldsymbol{l} = [\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{l}. \qquad (6)$$

Эта формула полезна во многих случаях. В частности, если скорость $\boldsymbol{v}$ перпендикулярна полю $\boldsymbol{B}$, то можно написать

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = \pm Bvl, \qquad (6а)$$

где знак определяется по формуле (6) или с использованием правила Ленца, о котором мы поговорим чуть позже.

Однако продолжим цепочку вычислений (6)

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = \left[\boldsymbol{l} \times \frac{d\boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{t}}\right] \cdot \boldsymbol{B} = \frac{d[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}]}{dt} \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{d\boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{t}}.$$

Итак,

Закон Фарадея

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (7)$$

Знак «минус» соответствует тому, что ЭДС индукции включена против выбранного положительного направления обхода контура. [1] Ток индукции

Индукционный ток

$$I^{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}^{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \qquad (8)$$

также направлен в отрицательную сторону.

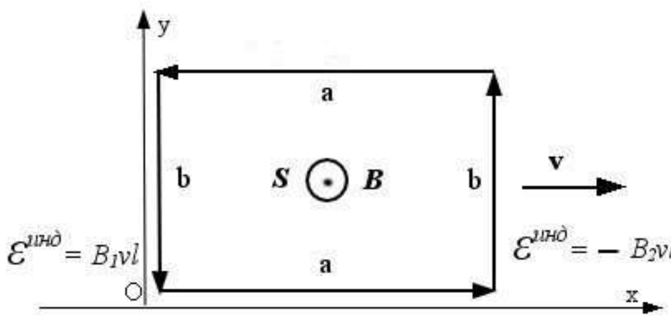
Раз по контуру протекает ток, то возникает ситуация «проводник с током в магнитном поле», рассмотренная в предыдущем параграфе, стало быть, появляется сила Ампера, показанная на рисунке пунктирной линией. [2]Эта сила направлена против внешней силы, вызывающей движение ползунка, тем самым препятствуя причине вызывающей ток индукции. Этот вывод обобщает *правило Ленца*.

Правило Ленца

Индукционный ток всегда направлен так, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.

Движение проводника – первоначальная причина, но оно приводит к изменению потока магнитной индукции. Проверьте, что создаваемое индукционным током поле препятствует этому изменению. Можно сказать, что знак «минус» в формуле для тока индукции (8) математически отображает правило Ленца.

Пусть теперь в магнитном поле перемещается рамка с током как целое со скоростью $\boldsymbol{v}$. На рисунке показана простейшая ситуация, и видно, что если магнитное поле однородное, то полная ЭДС индукции равна



нулю:[3]В неоднородном же поле для этого случая получаем (см. (6а))

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = -(B_2 - B_1)vb.$$

---

[1] Если, конечно, поток магнитной индукции увеличивается, как в нашем примере.

[2] Ее направление противоположно направлению силы Ампера предыдущего параграфа потому, что ток индукции отрицателен.

[3] ЭДС индукции на нашей картинке наводится только в проводниках длиной b.

Вычислим теперь производную по времени от потока магнитной индукции, учитывая, что $\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial B}{\partial x} v$:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\iint BdS = vb\int_a \frac{\partial B}{\partial x}dx = vb((B_2 - B_1).$$

Сравнивая два последних равенства, убеждаемся, что опять выполняется закон Фарадея (7). Можно показать, что он справедлив и при произвольной форме контура с током.

В обоих рассмотренных случаях в роли сторонней силы выступает сила Лоренца. Пусть в контуре, движущемся со скоростью $\boldsymbol{v}$ в неоднородном поле, горит лампочка. Ясно, что она будет гореть и для наблюдателя, движущегося вместе с контуром. Иначе говоря, перейдем в ИСО, привязанную к этому контуру. Раз лампочка горит, значит и в этой ИСО есть ЭДС индукции, но ведь в ней контур неподвижен, и нет никаких сил Лоренца!

Изменение потока магнитной индукции есть, потому что поле меняется во времени, но само это изменение *не может* быть *причиной* возникновение ЭДС, нужна *сторонняя сила*. Приходится признать, что для возникновения ЭДС в неподвижном контуре, пронизываемом изменяющимся во времени магнитным полем, должна быть сила, действующая на заряды, но которую мы пока не знаем. Что это за сила объясняет *первое положение теории Максвелла.*

1-ое положение теории Максвелла

Любое изменяющееся во времени магнитное поле порождает в пространстве изменяющееся во времени *вихревое* электрическое поле $\boldsymbol{E}$ такое, что циркуляция его по любому контуру Г определяется скоростью изменения потока вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ через любую поверхность S, границей которой служит этот контур:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (9)$$

Если контур неподвижен и не деформируется, то

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (10)$$

Вихревое электрическое поле как поле сторонней силы

Здесь контур Г – воображаемый, «вспомогательный», но если он совпадает с реальным проводящим контуром, то сразу получается закон Фарадея, поскольку вихревое электрическое поле $\boldsymbol{E}$ и есть то поле сторонней силы $q\boldsymbol{E}$, которое нам было необходимо для объяснения явления электромагнитной индукции в покоящемся контуре:

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = \oint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Таким образом, *в зависимости от выбора ИСО* в роли сторонней силы явления электромагнитной индукции может выступать либо сила Лоренца (двигающийся проводник), либо сила, действующая на заряд со стороны вихревого электрического поля (покоящийся контур).[1]В любом случае справедлив закон Фарадея (7).

Две стороны одной медали

Как видно из уравнения (8), сила со стороны вихревого электрического поля *может* совершать работу по замкнутому контуру.

Применим к левой части уравнения (10) теорему Стокса:

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S rot(\boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S},$$

так что это уравнение примет вид

$$\iint_S rot(\boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S},$$

и (в силу произвольности поверхности интегрирования) получаем

$$rot(\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \qquad (11)$$

Уравнение Максвелла (э.м. индукция)

Вспомним еще теорему Гаусса

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V (\rho + \rho')dV$$

(12)

и, применив к левой ее части теорему Остроградского – Гаусса,

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V div(\boldsymbol{E})dV,$$

получим

$$\iiint_V div(\boldsymbol{E})dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V (\rho + \rho')dV.$$

Опять же в силу произвольности, но теперь объема интегрирования, получаем

$$div(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho'). \qquad (14)$$

Уравнение Максвелла (источники поля)

[1] Либо их комбинация.

Уравнения (11) и (14) входят в систему уравнений Максвелла и описывают возникновение электрического поля. Они же в *интегральной форме* даются формулами (10) и (12).

Вместо уравнения (14) часто используется уравнение

$$div(\boldsymbol{D}) = \rho,$$

получающееся в точности так же из теоремы о потоке вектора электрического смещения.

Самоиндукция

Вернемся к контуру с током (при обсуждении этих вопросов его часто называют «витком с током») и посмотрим, что будет происходить, если ток в нем изменяется.

Индуктивность контура

Ток создает магнитное поле $\boldsymbol{B}$, и, конечно есть поток магнитной индукции Φ через поверхность, ограниченную рассматриваемым контуром. Этот поток пропорционален протекающему току: [1]

$$\Phi = LI. \tag{15a}$$

Явление самоиндукции

Коэффициент L называется *индуктивностью* или *коэффициентом самоиндукции* и определяется только свойствами самого контура (его геометрией, материалом).

При изменении тока возникает ЭДС, которая в данном случае называется ЭДС *самоиндукции*.

ЭДС самоиндукции

Явлением самоиндукции называется появление ЭДС индукции в контуре за счет изменения тока в нем самом. Для ЭДС самоиндукции из закона Фарадея получаем

$$\mathcal{E}^{\text{с−инд}} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{16}$$

Витки с током обычно оказываются соединены последовательно, когда провод наматывают на катушку. Пусть площадь витка есть S, полное число витков равно N, а их плотность (число витков на единицу длины l) –

$$n = N/l. \tag{17}$$

Магнитное поле внутри длинного соленоида с обмоткой мы уже вычислили:

$$B = \mu\mu_0 nI. \tag{18}$$

[1] Здесь и далее мы считаем, что нет каких-либо ферромагнитных материалов.

Благодаря однородности поля поток через один виток вычисляется легко

$$\Phi = \mu\mu_0 nIS.$$

Можно было бы вычислить ЭДС самоиндукции в одном витке, а затем умножить ее на полное число витков. Однако, чтобы сохранить соотношение (16), поступают по-другому.

Потокосцепление

Назовем *потокосцеплением* величину

$$\Psi = N\Phi$$

Определение индуктивности в общем случае

и несколько изменим определение индуктивности (15а), полагая

$$\Psi = LI. \qquad (15б)$$

Тогда для катушки справедлива формула (16), но для определения индуктивности нужно вычислить потокосцепление

Индуктивность соленоида

$$\Psi = \mu\mu_0 nNSI.$$

Сравнивая последнее равенство с определением (15), видим, что индуктивность соленоида есть

$$L = \mu\mu_0 nNS$$

или, учитывая (17)

$$L = \mu\mu_0 n^2 V, \qquad (19)$$

где $V = lS -$ объем соленоида.

Энергия магнитного поля

Любой контур с током (в том числе, конечно, и катушка) обладаут некоторой энергией. Это следует из следующего опыта. В некоторый момент времени отключим источник ЭДС, замкнув при этом контур. Ток не прекратится мгновенно, а некоторое время его будет поддерживать ЭДС самоиндукции. Запасенную энергию можно вычислить как работу, которую совершает ЭДС индукции при изменении тока от начального значения I до нуля. Элементарная работа есть

$$\delta A^{\nearrow} = I\mathcal{E}^{\text{с−инд}}dt = -IL\frac{dI}{dt}dt = -LIdI,$$

Энергия контура с током

так что запасенная энергия определяется интегрированием:

$$W = \int_I^0 -LIdI = \frac{1}{2}LI^2.$$

Попробуем переписать это выражение так, чтобы в него не входили ни ток, ни индуктивность. [1] Для этого выразим эти величины через другие параметры с помощью сосоотношений (18) и (19) соответственно. Получим

$$W_M = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}V.$$

Скоро мы убедимся, что вся эта энергия действительно заключена в магнитном поле. Наиболее общая формула для плотности энергии магнитного поля выглядит так:

Плотность энергии магнитного поля

$$w_M = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2},$$

а магнитная энергия, заключенная в объеме V пространства, находится интегрированием по этому объему:

Энергия магнитного поля

$$W_M = \iiint_V w_M dV .$$

Взаимная индукция

Взаимной индукцией называется явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре $\mathcal{E}_1^{\text{инд}}$при изменении тока I_2 в другом.

Взаимная индукция

У магнитного поля, создаваемого током I_2, есть поток[2] магнитной индукции Φ_1 через первый контур, пропорциональный этому току,

$$\Phi_1 = L_1^{(2)} I_2.$$

Коэффициент пропорциональности $L_1^{(2)}$ называется *коэффициентом взаимной индукции*.

Коэффициент взаимной индукции

В первом контуре наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_1^{\text{инд}} = -L_1^{(2)}\frac{dI_2}{dt}.$$

Аналогично, во втором контуре наводится ЭДС индукции при изменении тока в первом контуре:

$$\mathcal{E}_2^{\text{инд}} = -L_2^{(1)}\frac{dI_1}{dt},$$

где коэффициент взаимной индукции $L_2^{(1)}$ определяет поток магнитной индукции поля, создаваемого первым током, через второй контур:

[1] Подобным образом мы уже действовали при обсуждении энергии конденсатора в лекции 4.
[2] В общем случае надо говорить о потокосцеплении.

$$\Phi_2 = L_2^{(1)} I_1.$$

Терема взаимности утверждает, что

$$L_1^{(2)} = L_2^{(1)}.$$