Оптика. Волновые свойства света

Предварительные замечания

Сначала нам надо договориться о некоторых вещах, принятых в оптике.

В линейных процессах[1] в фиксированной ИСО частота света никогда не меняется. Причина будет понятна в следующем семестре (там же мы поговорим о некоторых отступлениях от этого правила, не меняющих сути дела в явлениях, которые мы будем изучать здесь). Поэтому из соотношения для скорости света в среде (n – показатель преломления)

$$v = c/n$$

следует, что волновое число в среде есть

$$k^{\text{ср}} = \frac{\omega}{v} = nk,$$

а длина волны -

$$\lambda^{\text{ср}} = 2\pi/k^{\text{ср}} = \lambda/n.$$

Здесь k и λ – волновое число и длина волны в вакууме. Договоримся, что если используются обозначения этих величин без каких-либо индексов, явно указывающих на среду, то *всегда имеются в виду* волновое число и длина волны в *вакууме*.

Шкала электромагнитных волн

Электромагнитные волны охватывают чрезвычайно широкий диапазон. Если длина волны $\lambda \gtrsim 10^3$м,[2] то говорят о сверхдлинных волнах. Вы никогда не задумывались, почему сетевая частота у нас 50Гц, в США и Японии – 60Гц, но большая частота в быту не используется, хотя чем больше частота, тем миниатюрнее можно сделать трансформаторы?[3] Потому что велики оказываются потери на излучение именно сверхдлинных волн.

[1] Нелинейные эффекты наблюдаются при больших интенсивностях света, обычно при использовании анизотропных кристаллов. При этом можно получить сложение и вычитание, удвоение и т.д. частот.

[2] Знак $\gtrsim$ означает «больше или порядка». Он означает, что левая часть может быть как заметно больше правой части, так и несколько меньше ее.

[3] Именно с этой целью в военных изделиях используется частота 400Гц.

Диапазону радиоволн соответствуют длины 10^3 – 10^{-4}м. Далее начинается оптический диапазон в широком смысле. Границу, отделяющую его от радиоволн определить очень трудно, обычно это делается исходя из использующихся методов генерации и регистрации волн. Будем считать, что инфракрасному излучению соответствуют длины волн от 10^{-5} вплоть до видимого света: $8 \cdot 10^{-7}$ (фиолетовая граница) - $4 \cdot 10^{-4}$м (красная граница). Насколько узок интервал видимого света, настолько же он важен для нашей жизни! Ультрафиолет начинается с фиолетовой границы до длин волн $\lambda \sim 10^{-9}$м. На этом «оптический диапазон в широком смысле» заканчивается, и далее идут рентгеновское (10^{-10} – 10^{-12} м) и γ- излучения, о которых пойдет речь в следующем семестре.

Мы уже видели, что воздействие света на вещество, а стало быть, и на приборы, определяется вектором напряженности электрического поля в волне, точнее его квадратом, поскольку важна энергия, передаваемая светом веществу. Опыт и теория показывают, что ярче для глаза будет то место, где больше плотность мощности падающего излучения.[1]

Время усреднения прибора τ

Каждый прибор имеет характерное время усреднения τ поступающего на него излучения.[2] Это время для глаза[3] порядка 0,1 секунды (вспомним, что при частоте 10 кадров в секунду мы видим непрерывное изображение, хотя и мелькающее). Практически для всех оптических регистрирующих приборов время усреднения на много – много порядков больше, чем период колебаний световой волны ($\sim 10^{-15}$с). Поэтому отклик приборов (как и вообще воздействие на вещество) определяется *средним значением* плотности мощности в падающей световой волне. Эту величину принято называть *интенсивностью I* световой волны.

Интенсивность световой волны

[1] По крайней мере, в тех случаях, которые нас будут интересовать. Плотность мощности – энергия, падающая в единицу времени на единичную площадку вещества.
[2] Это время примерно соответствует временному разрешению: все, что усредняется, разглядеть нельзя.
[3] Глаз и в наши дни остается во многих отношениях уникальным прибором.

Мы знаем, что всеми свойствами интенсивности в случае плоской монохроматической волны обладает среднее значение модуля вектора Умова – Пойтинга. Поэтому часто можно положить (см. предыдущую лекцию)

$$I =< |\boldsymbol{S}| >= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} nc\varepsilon_0 E_0^2 \qquad (1)$$

Иногда используют другие выражения для интенсивности, но для нас важно, что эта величина всегда пропорциональна квадрату амплитуды электрического поля в волне, причем коэффициент пропорциональности, даже если используется выражение, отличное от формулы (1), во всех выражениях один и тот же.

Интерференция волн

Пусть в некоторую точку пространства приходят две монохроматические волны *одной частоты* ω. В этой точке мы имеем дело с гармоническими колебаниями световых векторов:[1]

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{10} e^{i\varphi_1} e^{-i\omega t}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{20} e^{i\varphi_2} e^{-i\omega t},$$

где $\boldsymbol{E}_{10}$ и $\boldsymbol{E}_{20}$ амплитуды, а φ_1 и φ_2 – начальные фазы.[2] Начальными фазами мы займемся чуть позже, а пока подумаем, как нам найти интенсивность волны в нашей точке.

Сначала надо колебания сложить по принципу суперпозиции

$$\boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{E}_{10} e^{i\varphi_1} + \boldsymbol{E}_{20} e^{i\varphi_2}\right) e^{-i\omega t} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

где $\boldsymbol{E}_0$ – комплексная амплитуда результирующего колебания.

Теперь найдем квадрат амплитуды результирующей волны, умножением поля $\boldsymbol{E}$ на сопряженную ему величину $\boldsymbol{E}^*$:

$$E_0{}^2 = \left(\boldsymbol{E}_{10} e^{i\varphi_1} + \boldsymbol{E}_{20} e^{i\varphi_2}\right)\left(\boldsymbol{E}_{10} e^{-i\varphi_1} + \boldsymbol{E}_{20} e^{-i\varphi_2}\right) =$$

$$= E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2(\boldsymbol{E}_{10} \cdot \boldsymbol{E}_{20})\cos(\varphi_2 - \varphi_1).^{1} \qquad (2)$$

---

[1] Напомню, что световым вектором в оптике называют вектор напряженности электрического поля.

[2] Под этими комплексными записями подразумеваются, как мы договорились, их действительные части, например, для первой волны $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{10}\cos(\omega t - \varphi_1)$.

Обратим внимание, что при вычислении квадрата амплитуды поля исчезла зависимость от времени, т.е. мы как бы автоматически произвели усреднение по времени.

Интенсивность первой волны I_1 пропорциональна E_{10}^2, интенсивность I_2 второй волны – E_{20}^2, а интенсивность I результирующей волны – ${E_0}^2$ с одним и тем же коэффициентом пропорциональности. Если ввести угол α между амплитудами $\boldsymbol{E}_{10}$ и $\boldsymbol{E}_{20}$, то соотношение (2) перепишется через интенсивности так:

Интенсивность интерферирующих пучков света

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\alpha) < \cos(\Delta\varphi) >. \qquad (3)$$

где разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Проанализируем полученное выражение.

Во-первых, интенсивность при наложении двух волн не равна, вообще говоря, сумме их интенсивностей. Третье слагаемое в правой части формулы (3), ответственное за это неравенство, называется *интерференционным членом*, а само

Интерференция

явление взаимного усиления или ослабления волн в результате их сложения по принципу суперпозиции называется интерференцией.

Во вторых, практически всегда угол α между направлениями колебаний в приходящих волнах весьма мал,[2] так что будем считать, что $\cos(\alpha) \approx 1$.

Наконец, косинус разности фаз взят в скобки, показывающие, что его надо усреднить за *время усреднения прибора наблюдения*. Дело в том, что ни одно излучение не является строго монохроматическим, а фаза приходящих колебаний в отдельной волне изменяется с течением времени. Это изменение может быть достаточно медленным (например, при использовании хороших лазеров) или довольно быстрым, если речь идет, например, об обычных лампах. Свет от лампы накаливания образуется в результате испускания волн отдельными атомами нагретого вещества. В первом приближении можно считать, что атом генерирует световой **цуг** – «обрывок» синусоиды с характерной дли-

---

[1]Была использована формула $\cos(\varphi) = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$.

[2] Отметим, что невыполнения этого условия привело бы к ослаблению эффекта.

тельностью 10^{-8} секунды со случайной начальной фазой.

Если за время усреднения прибора интерференционный член изменяет свой знак, т.е. если разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ изменяется более чем на π, то при усреднении он исчезает, и наблюдать интерференцию становится невозможным.

Синонимом к выражению «два луча, для которых можно наблюдать интерференцию» служит выражение «два луча когерентны», так что мы можем предварительно сформулировать такое утверждение.

Условия когерентности лучей.

Два луча когерентны, если

1) они имеют одинаковую частоту;
2) угол между плоскостями колебаний световых векторов достаточно мал ($\cos(\alpha) \approx 1$);
3) разность фаз в точке наблюдения изменяется незначительно (менее чем на π) за время усреднения прибора наблюдения.

Обратим внимание, что понятие когерентности привязано к прибору наблюдения: лучи, некогерентные по отношению к одному прибору, могут оказаться когерентными по отношению к другому прибору, с большим временным разрешением.[1]

Лучи, приходящие от двух независимых обычных источников (не лазеров и т.п.), заведомо не когерентны. Поэтому было предложено для наблюдения интерференции использовать лучи, идущие по разным путям (т.е. разные лучи) от одного и того же источника.

Мы как-то незаметно стали использовать термин «луч». Как ни странно, это довольно сложное понятие. Мы, основываясь на интуиции, под лучом будем понимать путь, по которому распространяется энергия световой волны от источника к точке наблюдения. От точечного источника лучи идут по всем направлениям, все лучи в плоской волне параллельны друг другу.

Фаза колебаний любого луча в точке наблюдения складывается из начальной фазы колебаний в источнике (об этом мы уже говорили) и отставания по фазе от источника по мере того, как луч путешествует (почему-то часто гово-

[1] Т.е. с меньшим временем усреднения.

рят «набег фазы). Если используется один источник, то в разности фаз остается только это отставание. В плоской волне мы записывали изменения фазы колебаний в волне в виде произведения $\boldsymbol{kr}$. Вдоль луча это произведение превращается в $k_{\text{ср}}l$, где l – путь, проходимый в среде.[1]

Однако луч может путешествовать по сложному пути. Пусть, например, он сначала прошел путь l_1 в среде с показателем преломления n_1, затем преломившись, прошел путь l_2 в среде n_2 и так далее. Кроме набега фазы есть еще одна причина, по которой фаза в луче может измениться, причем скачком.

Назовем *оптически более плотной* средой среду с большим показателем преломления. Тогда имеет место утверждение (мы в дальнейшем в этом убедимся), что *при отражении от оптически более плотной среды фаза в луче изменяется на* π (т.е. меняется на противоположную).

Если число таких отражений четное, то произойдет изменение фазы на 2π, т.е. ничего вообще не произойдет, если нечетное – то можно считать, что полное изменение фазы есть π. Всю эту длинную фразу мы будем заменять слагаемым в скобочках $(+\pi)$.

Итак, фаза колебаний в первом, например, луче есть

$$\varphi_1 = k_1l_1 + k_2l_2 + \ldots (+\pi) = k(n_1l_1 + n_2l_2 + \ldots (+\pi/k)).$$ [2]

(4)

Сумма

$$L = (n_1l_1 + n_2l_2 + \ldots (\lambda/2) \qquad (5)$$

называется оптической длиной пути.[3]

Оптическая длина пути

Разность оптических длин путей двух лучей называется *оптической разностью хода*:

$$\Delta = L_2 - L_1. \qquad (6)$$

Оптическая разность хода

Из формул (4) и (5) следует, что разность фаз колебаний в двух лучах связана с их оптической разностью хода $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ соотношением

$$\Delta\varphi = k\Delta$$

Разность фаз – оптическая разность хода

[1] Мы явно показали, что речь идет о волновом числе в среде.
[2] $\pi/k = \lambda/2$.
[3] Из этой формулы понятно, почему говорят «при отражении от оптически более плотной среды теряется (что то же, что приобретается) пол длины волны».

или

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta. \qquad (7)$$

Запомним, что разности фаз 2 π соответствует оптическая разность хода λ.

Физики любят разность фаз, а оптики – оптическую разность хода.

Разность фаз в различных точках пространства оказывается различной вместе с оптической разностью хода. Поэтому в пространстве (на экране) можно наблюдать *интерференционную картину* – чередование светлых и темных областей.

Как показывает интерференционная формула (3), максимумы интенсивности ($\cos(\Delta\varphi) = 1$) наблюдаются там, где колебания в приходящих волнах происходят в одной фазе

$$\Delta\varphi = 2\pi m \text{ или } \Delta = m\lambda, \qquad (8)$$

Max

а минимумы ($\cos(\Delta\varphi) = -1$) появляются из-за колебаний в противофазе, т.е. когда

Min

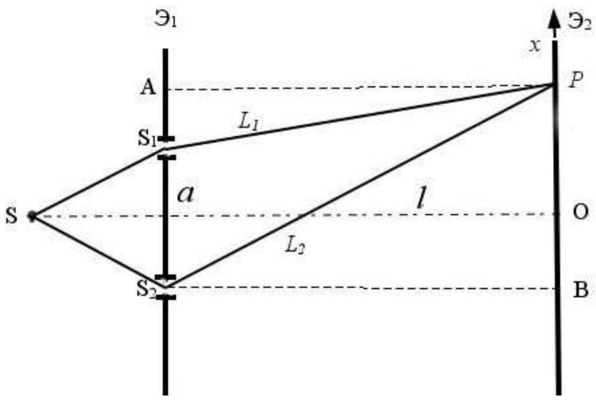
$$\Delta\varphi = \pi(2m + 1) \text{ или } \Delta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda. \qquad (9)$$

Число $m = 0,\ \pm1,\ \pm2$ ... называются *порядком* интерференции.[1]

Порядок интерференции

Наиболее контрастной картина получается тогда, когда интенсивности I_1 и I_2 близки. В частности, при I_1=I_2 максимальная интенсивность в 4 раза больше интенсивности одного луча, а минимальная интенсивность равна нулю.

Существует много способов наблюдения интерференции, но их можно свести к одному, самому простому, который можно назвать общей схемой интерференции.



Общая схема интерференции

Световые лучи от источника S проходят через две щели

[1] В области, где волны усиливают друг друга, говорят о *конструктивной*, а там, где взаимно ослабляются ,– о *деструктивной* интерференции.

в экране $Э_1$, образуя два источника S_1 и S_2. Лучи от этих источников попадают на экран $Э_2$, в точках которого все как в сказочке «Пусть в некоторую точку экрана приходят два луча…» и на котором наблюдается интерференционная картина в виде плавно переходящих друг в друга светлых и темных полос, перпендикулярных плоскости рисунка.[1]
Пусть расстояние между экранами равно l, а между щелями – a. По экрану $Э_2$ пустим ось Ox, как показано на рисунке и займемся точкой наблюдения P с координатой x. Любая задача на интерференцию начинается с нахождения оптической разности хода лучей $\Delta = L_2 - L_1$.

Из треугольника S_1AP находим

$$L_1 = \sqrt{l^2 + (x - a/2)^2}.$$

Через несколько секунд мы убедимся, что расстояние l между экранами должно быть существенно больше как расстояния между щелями a, так и расстояния $|x|$ от точки наблюдения до середины экрана:

$$l \gg a,\ l \gg |x|. \qquad (10)$$

Это дает возможность воспользоваться формулой Тейлора:[2]

$$L_1 = \sqrt{l^2 + (x - a/2)^2} = l\sqrt{1 + (\frac{(x-a/2)}{l})^2} \approx l + \frac{(x-a/2)^2}{2l}.$$

Аналогично, из треугольника S_2BР находим

$$L_2 = \sqrt{l^2 + (x + a/2)^2} \approx l + \frac{(x+a/2)^2}{2l}.$$

Оптическая разность хода лучей в стандартной схеме наблюдения интерференции

Далее будем писать, как это принято, точный знак равенства. Находим оптическую разность хода $L_2 - L_1$:[3]

$$\Delta = xa/l. \qquad (11)$$

Показанная на рисунке схема считается общей (или стандартной) схемой, поскольку другие способы наблюдения в смысле вычислений приводятся к ней. Надо только выяс-

[1] В силу симметрии схемы.
[2] В нашем случае достаточно двух членов разложения $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, |x| \ll 1$.
Разложение в ряд Тейлора – один из важнейших математических приемов в физике. Например, очень редко используется правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей, обычно это делается с помощью первых членов ряда Тейлора. Обратите внимание, как исчезают большие слагаемые l из разности $L_2 - L_1$, это позволяет избежать вычислений с большим количеством знаков.
[3] Знак этой величины не важен, потому что она все равно попадет в лапы к косинусу.

нить, что служит источниками S_1 и S_2 и что играет роль расстояний a и l.

Найдем положение на экране максимумов (8) и минимумов (9) интенсивности порядка m.

Положение максимумов и минимумов

$$x_m^{max} = m\lambda\frac{l}{a},$$

$$x_m^{min} = (m+\frac{1}{2})\lambda\frac{l}{a}.$$

Шириной максимума m-го порядка обычно называют расстояние δx_m между двумя ближайшими к нему минимумами

Ширина максимума

$$\delta x_m = x_m^{min} - x_{m-1}^{min} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda\frac{l}{a} - \left(m-\frac{1}{2}\right)\lambda\frac{l}{a} =$$

$$= \lambda\frac{l}{a}. \qquad (12)$$

Таково же и расстояние между двумя соседними максимумами. Расстояние между ближайшими максимумом и минимумом равна, очевидно, половине величины (12).

Максимум нулевого порядка – в точке O, ближайшие к нему минимумы имеют координаты

$$x_{\pm 1}^{min} = \pm\frac{1}{2}\lambda\frac{l}{a} \qquad (13)$$

Несколько секунд прошли, и мы действительно можем убедиться, что условия (10) необходимы. Чтобы получить расстояние между максимумами в 1мм (я и в этом случае ничего не разгляжу) при расстоянии между щелями в 0,5 мм на длине волны 500 нм (граница зеленого и голубого цветов), расстояние между экранами должно быть равно 1 м.

Можно написать и формулу для интенсивности. Если интенсивности равны, $I_1 = I_2 = I_0$, то формула (3) с учетом (7) и (11) дает

Интенсивность при интерференции лучей одной интенсивности

$$I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right)\right) = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi x a}{\lambda l}\right). \qquad (14)$$

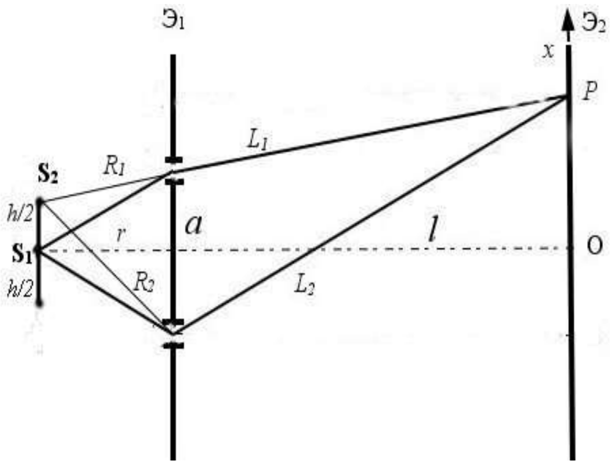
Интенсивности всех максимумов получаются одинаковыми ($4\,I_0$), однако в действительности контрастность уменьшается по мере удаления от середины картины из-за неравномерного излучения щелей, а главное, по причине, которая будет обсуждаться в следующей лекции.

Еще в 1660г.[1] Ф. Гримальди все сделал так, как на нашем рисунке, «взяв» в качестве источника Солнышко. И никакой интерференционной картины не увидел. Примерно 140 лет [2] понадобилось физикам, чтобы понять, в чем дело. Мы разберемся гораздо быстрее – уже на следующей лекции.

Пространственная когерентность

В рассмотренной нами схеме интерференции источник S считался *точечным*. Это означает, расстояния от любой его точки до щелей одинаковы. Кроме того, мы его расположили так, чтобы были одинаковы и расстояния от него до обеих щелей.

На новом рисунке старый источник S назван S_1. Теперь подумаем, что произойдет, если взять источник S_2, смещенный на расстояние $h/2$ от осевой линии (на которой находится источник S_1). Будем считать, что расстояние r от S_1 до экрана Э$_1$ существенно больше, чем расстояние между щелями a и смещение источников $h/2$, т.е. выполняются условия [3]



$a \ll r$ и $h \ll r$.

Видно, что для лучей, идущих от источника S_2 в точку наблюдения P, к старой оптической разности хода Δ (11) слева от экрана Э$_1$ добавилась новая

$$\Delta' = \frac{ha}{2r}. \qquad (15)$$

[1] Точную дату установить не удалось, но его опыты были описаны в посмертно изданной книге в 1665 г.
[2] Результаты опытов Юнга были опубликованы в 1803г.
[3] На рисунке это, конечно, совсем не так, но на то он и плохой рисунок.

Эта формула сразу получается из формулы (11) заменой $x \to h/2,\ l \to r$, поскольку вся геометрия аналогична.

Интерференционная картина для источника S_2 будет сдвинута относительно картины от источника S_1. Чтобы понять, каков этот сдвиг, посмотрим, куда сместится точка максимума нулевого порядка x_0 (раньше она помещалась в точке О). Для этой точки оптические пути обоих лучей равны, т.е.[1]

$$\Delta + \Delta' = 0,$$

или

$$\frac{x_0 a}{l} + \frac{ha}{2r} = 0,$$

Отсюда для смещения картины получаем

Смещение интерференционной картины при смещении источника

$$x_0 = -\frac{l}{a}\Delta', \qquad (16)$$

или

$$x_0 = -\frac{lh}{2r}. \qquad (17)$$

Знак минус показывает, что картина смещается в отрицательном направлении оси Ox (т.е. вниз на нашем рисунке).

Совместим источники и будем отодвигать источник S_2 от источника S_1. Когда расстояние между ними $h/2$ достигнет такой величины, что **дополнительная разность хода** $\Delta' = \boldsymbol{\lambda/2}$[2], т.е. согласно формуле (15)

$$\frac{h}{2} = \frac{r\lambda}{2a}, \qquad (18)$$

смещение (16) станет равным

$$x_0 = -\frac{l\lambda}{2a},$$

т.е. максимумы от источника S_2 придутся на минимумы от источника S_1 (см. (13)). Ясно, что при этом интерференционная картина пропадет.

Протяженный источник

Теперь обратимся к протяженному источнику, который можно представить непрерывной последовательностью бесконечно малых источников. Если его длина h достигнет величины (см. рис. и (18)) $h_{\text{пред}} = \lambda r/a$, то интерференционная картина пропадет, поскольку *каждой точке верхней половины будет соответствовать точка нижней половины*

[1] В нашем случае (см. рис.) это означает, что $R_1 + L_1 = R_2 + L_2$. Сразу видно, что нулевой максимум сместится вниз.

[2] Это значит, в точке наблюдения фазы колебаний от источников S_1 и S_2 противоположны.

такая, что расстояние между ними дается формулой (18), а дополнительная оптическая разность хода есть $\Delta' = \boldsymbol{\lambda/2}$.

Два луча, которые могут образовывать интерференционную картину с учетом протяженности источника, называются пространственно когерентными.

Пространственная когерентность

Максимальное расстояние по фронту волна, на котором два луча пространственно когерентны, называется радиусом когерентности $\rho_{\text{ког}}$.

Радиус когерентности

Мы видели, что для наблюдения картины интерференции нужно, чтобы выполнялось условие

$$h < \lambda r/a \qquad (19)$$

или, для расстояния между щелями, [1]

$$a < \lambda r/h,$$

поэтому полагают

$$\rho_{\text{ког}} = \lambda r/h. \qquad (20)$$

Формула для радиуса когерентности

Формулу (19) часто записывают через угловой размер источника света $\theta = h/r$:

$$\rho_{\text{ког}} = \lambda/\theta. \qquad (20а)$$

Оценим радиус когерентности света, приходящегося от Солнца. Расстояние до Солнца $r \approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$м, его диаметр $h \approx 1{,}4 \cdot 10^{9}$м, так что угловой размер $\theta \approx 0{,}01$ рад. Для длины волны $5 \cdot 10^{-7}$м получаем оценку радиуса когерентности $\rho_{\text{ког}} \approx 5 \cdot 10^{-5}\text{м} = 50\text{мкм}$. Ясно, что Гримальди не мог сделать расстояние между отверстиями столь маленьким.

Т. Юнг пошел по другому пути. На достаточно большом расстоянии r *перед* экраном $Э_1$ он поставил дополнительную узкую щель так, чтобы для ее ширины h с запасом удовлетворялось условие (19). С такой дополнительной щелью наши рисунки превращаются в схему (опыт) Юнга.

Опыт Юнга.

Замечу еще, что от конечного источника, помещенного «в бесконечность», приходит плоская волна. Поэтому радиус когерентности плоской волны бесконечен.

[1] Это и есть «расстояние по фронту».

Немного подкрепим математикой наши рассуждения «на пальцах». Обозначим ψ дополнительный набег фазы до первого экрана (см. (7))

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta',$$

перепишем формулу для интенсивности (14) с учетом этой фазы

$$I = 2I_0\left(1 + \cos\left(\psi + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right)\right)$$

и усредним ее (см. Лекцию 0) по фазе ψ от $-\Delta\psi/2$ (нижний конец источника) до $\Delta\psi/2$ (верхний конец). Усреднению подлежит только косинус:

$$< \cos\left(\psi + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) >= \frac{1}{\Delta\psi}\iint_{-\Delta\psi/2}^{\Delta\psi/2} \cos\left(\psi + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) d\psi =$$

$$= \frac{1}{\Delta\psi}(\sin\left(\frac{\Delta\psi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) - \sin\left(-\frac{\Delta\psi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right)) = G(\Delta\psi)\cos(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta)\,,$$

где

$$G(\Delta\psi) = \frac{2\sin(\Delta\psi/2)}{\Delta\psi}. \qquad (21)$$

Убедимся, что результат разумен.[1] Для точечного источника $\Delta\psi \to 0$ и $G(\Delta\psi) \to 1$, как и должно быть. После усреднения формула для интенсивности выглядит так:

$$I = 2I_0\left(1 + G(\Delta\psi)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right)\right) \qquad (22)$$

Величина $\Delta\psi/2$ есть разность фаз колебаний в лучах, приходящих от верхнего конца и середины протяженного источника, соответствующая оптическая разность хода дается формулой (15), поэтому

$$\frac{\Delta\psi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{ha}{2r} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{ha}{r}.$$

Первый раз $\sin(\Delta\psi/2)$ обращается в ноль, когда

$$\frac{\pi}{\lambda}\frac{ha}{r} = \pi,$$

т.е. когда

$$a = \lambda r/h,$$

что и соответствует радиусу когерентности (20).

Отношением $\frac{I_{max}-I_{\min}}{I_{max}+I_{min}}$ называют видностью интерференционной картины. Проверьте с помощью формулы (22), что видность как раз равна модулю $|G(\Delta\psi)|$ (21).

Видность интерференционной картины

Временная когерентность

Одним из условий когерентности было требование одинаковой частоты двух лучей. Однако сами эти лучи могут быть не совсем монохроматическими, а состоять из из-

[1] Мы еще встретимся с функцией, которую вводят так: $sinc(x) = \sin(x)/x$.

лучения в пределах разности частот $\delta\omega$ (или разности длин волн $\delta\lambda$), удовлетворяющих условию

Квазимонохроматическое излучение

$$|\delta\omega| \ll \omega \quad (|\delta\lambda| \ll \lambda). \tag{23}$$

Световое излучение, состоящее из лучей, удовлетворяющих условию (23), называется квазимонохроматическим. [1]

Вернемся к формуле (14), и пусть первичное излучение, идущее от источника S, состоит из лучей с волновыми числами только k и $k + \delta k/2$. Разность фаз колебаний в точке наблюдения

$$\Delta\varphi = k\Delta$$

зависит от волнового числа (или, что то же, от длины волны) и если окажется, что максимумы для одной волны совпадут с минимумами другой, [2] то картина размоется. При увеличении оптической разности хода первый раз это произойдет тогда, когда $(k + \delta k/2)\Delta - k\Delta = \pi$, т.е. когда

Предельное значение оптической разности хода

$$\Delta = 2\pi/\delta k. \tag{24}$$

Пусть теперь речь идет о квазимонохроматическом излучении, волновые числа которого лежат в интервале от $k - \delta k/2$ («нижняя часть») до $k + \delta k/2$ («верхняя часть»). [3] При выполнении условия (24) каждому волновому числу из «нижней части», образующему минимум, найдется волновое из «верхней части», образующее максимум, и наоборот, так что картина интерференции наблюдаться не будет.

Предельная допустимая оптическая разность хода (24) называется длиной когерентности

Длина когерентности

$$l_{\text{когер}} = 2\pi/\delta k. \tag{25}$$

а необходимое для наблюдения интерференционной картины требование, чтобы оптическая разность хода была меньше длины когерентности [4]

Продольная (временная) когерентность

$$\Delta < l_{\text{когер}} \tag{26}$$

называется условием продольной (или временной) когерентности.

---

[1] Обычно при этом считается, что частоты (длины волн) распределены непрерывно.

[2] Т.е. разность фаз колебаний для лучей с волновым числом $k + \delta k$ и разность фаз для лучей с волновым числом k будут отличаться на $\pi + 2\pi m$.

[3] Говорят, что δk есть ширина спектра такого излучения (в терминах волновых чисел).

[4] Строго говоря, оптическая разность хода может иметь произвольный знак. Однако модуль в этой формуле просто подразумевается.

Нам понятно, почему «продольная» когерентность – ведь речь идет об оптической разности хода вдоль луча. Скоро будет понятно, почему ее называют также временной.

Определение длины когерентности (25) и (26) можно переписать через ширину спектра $\delta\lambda$ по длинам волн. Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, а величины δk и $\delta\lambda$ малы, и их можно заменить дифференциалами, то

$$\delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2}\delta\lambda. \qquad (27)$$

Мы не написали знак «минус», так как величина δk, как и $\delta\lambda$ определяют положительную величины (ширину спектра). Подставляя (27) в определение (25) получаем

Длина когерентности

$$l_{\text{когер}} = \lambda^2/\delta\lambda \qquad (28)$$

Таким образом, для наблюдения интерференционной картины должно выполняться такое условие продольной когерентности:

Условие продольной (временной) когерентности

$$\Delta < \lambda^2/\delta\lambda. \qquad (29)$$

Мы помним, что схема Юнга позволяет определить радиус пространственной когерентности, теперь мы видим, что она же позволяет оценить длину когерентности по ширине дифракционной картины – ведь чем дальше точка наблюдения отстоит от ее середины, тем больше оптическая разность хода. Этому можно придать еще более наглядный вид.

Вспомним, что максимум -го порядка наблюдается при оптической разности хода (8) $\Delta = m\lambda$, и сравнив это выражение с условием (29), видим, что можно наблюдать только такие максимумы, для которых [1]

Оценка продольной когерентности

$$m < \lambda/\delta\lambda. \qquad (30)$$

Приведенные рассуждения показывают, почему исчезает картина при увеличении оптической разности хода для квазимонохроматического излучения. Можно подтвердить наши выводы простой математикой, а именно усредним косинус интерференционного члена, как мы это делали при анализе пространственной когерентности, но теперь по волновым числам в пределах ширины спектра δk:

$$< \cos(k\Delta) >= \frac{1}{\delta k}\int_{k-\frac{\delta k}{2}}^{k+\frac{\delta k}{2}} \cos(k\Delta)dk = \frac{2\sin(\delta k\Delta/2)}{\delta k\Delta}\cos(k\Delta).$$

[1] Величину $\lambda/\delta\lambda$ иногда называют степенью монохроматичности света.

Модуль дроби представляет собой видность (говорят еще *контраст*) интерференционной картины

$$\frac{I_{max}-I_{\min}}{I_{max}+I_{min}} = \left|\frac{2\sin\left(\frac{\delta k\Delta}{2}\right)}{\delta k\Delta}\right|,$$

которая первый раз при увеличении оптической разности хода Δ исчезает, когда

$\frac{\delta k\Delta}{2} = \pi$, т.е. когда $\Delta = 2\pi/\delta k$ в согласии с формулой (24),

Теперь поставим один, быть может, неожиданный вопрос. Мы говорили, что свет от лампочки состоит из коротких цугов, излучаемых отдельными атомами, со случайной начальной фазой. Даже в том случае, когда мы делим излучение на две части, в точку наблюдения приходит огромное количество таких некоррелированных цугов. Почему же интерференционная картина не пропадает в этом случае?

Ответ очень прост. Действительно, приходит огромное, но конечное число цугов. Тогда сложение их по принципу суперпозиции можно выполнять в любом порядке, например, сначала складывая их попарно: часть цуга, прошедшего по одному пути и часть *этого же* цуга, путешествовавшего по другому пути. Для этих частей одного цуга верны все наши рассуждения. Потом складываем результаты, которые, по сути, одинаковы: все пары дают либо максимум, либо минимум, либо ни то ни се.

Становится ясно, что очень важно, чтобы в точке наблюдения части одного и того же цуга накладывались друг на друга, но для этого необходимо, чтобы оптическая разность хода Δ была *меньше* длины цуга $\Delta l_ц$. Иначе пришедшая раньше часть не дождется второй части, которой пришлось бежать по более длинному пути. Итак, необходимо выполнение условия

Условие временной когерентности

$$\Delta < \Delta l_ц. \qquad (31)$$

Поскольку цуг движется со скоростью света, то время его жизни в некоторой точке пространства (это же время, в течение которого его генерирует атом) есть $\Delta t_ц = \Delta l_ц / c$. Эта длительность цуга должна быть больше, чем время ожидания прихода второй части цуга $\Delta l_ц / c$. Именно поэтому говорят, что соотношение (31) – условие временной когерентности.

На первый взгляд кажется, что это какое-то новое условие, но немного подумаем. Если длина цуга очень большая (стремится к бесконечности), то мы просто получаем монохроматическое излучение с $\delta\lambda = 0$. Чем меньше длина цуга, тем труднее его представить в виде суперпозиции монохроматических волн, тем дальше он от строго монохроматической волны, тем шире его спектр. Иначе говоря, длина цуга связана со степенью монохроматичности света. Так может быть, соотношения (26) и (31) просто одно и то же? Если это так, то должно быть

Длина цуга и длина когерентности

$$\Delta l_{ц} = l_{когер},$$

т.е. (см. (25))

$$\Delta l_{ц}\delta k = 2\pi. \qquad (32)$$

Оказывается, что так оно почти и есть, а это означает, что формулы (26) и (31) – две стороны одной медали.

Пусть некоторые колебания представляют собой суперпозицию гармонических колебаний

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'.$$

То, что мы написали, есть обратное преобразование Фурье.[1]
Функция $A(\omega)$ представляет амплитуды на частотах ω (спектр колебаний) и находится из прямого преобразования

$$A(\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega' t}dt.$$

Опишем колебания в цуге функцией[2]

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{\Delta t_{ц}} e^{-i\omega t}, & -\Delta t_{ц}/2 < t < \Delta t_{ц}/2 \\ 0, & \text{вне этого иньервала} \end{cases},$$

тогда

$$A(\omega) = \int_{-\Delta t_{ц}/2}^{\Delta t_{ц}/2} e^{-i\omega t}\, e^{i\omega' t}dt = A\frac{\sin(\frac{(\omega'-\omega)\Delta t_{ц}}{2})}{(\frac{(\omega'-\omega)\Delta t_{ц}}{2})}.$$

С этой функцией мы уже встречались много раз. Максимум ее лежит на частоте $\omega' = \omega$ (и равен A). Если за ширину спектра принять разность $\delta\omega = \omega' - \omega$, при которой функция $A(\omega)$ впервые обращается в ноль, то

$$\Delta t_{ц}\delta\omega = 2\pi,$$

[1] Различные определения преобразования Фурье могут отличаться коэффициентами перед интегралом и знаком аргумента экспоненты. Мы выбираем так, как нам угодно, но, конечно, правильно.

[2] Это не совсем правильно, но не будем себе усложнять жизнь. Величина $\frac{A}{\Delta t_{ц}}$ – это как бы амплитуда, равномерно распределенная по длительности цуга.

что то же самое, что (32).[1]

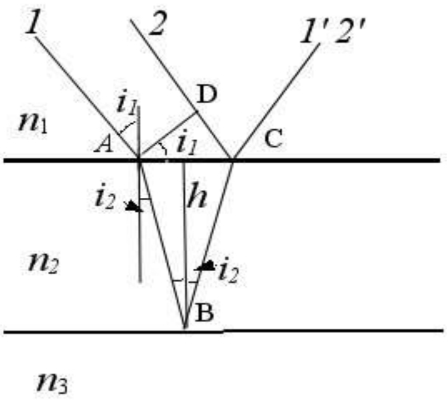
Формула (32) верна, если синусоида «обрезана» прямоугольником. В других случаях постоянная в правой части не будет равна 2π, но всегда верно соотношение $\Delta l_ц \delta k \gtrsim 1$. Для следующего семестра чуть переделаем это соотношение. Пусть волна распространяется вдоль оси z, так что $k = k_z$, будем писать Δk_z вместо δk_z, а длину цуга обозначим Δz. Тогда

$$\Delta z \Delta k_z \gtrsim 1.$$

Интерференция в тонких пленках

Существуют различные способы наблюдения интерференционной картины, но чаще всего в повседневной жизни мы сталкиваемся именно с интерференцией в тонких пленках, например, когда видим цветные разводы на луже, покрытой тонким слоем бензина – пример того как нам несладко приходится жить среди машин.

Итак, рассмотрим тонкую пленку[2] с показателем преломления n_2, на которую падают лучи света из области с показателем преломления n_1 и которая покрывает подложку с показателем преломления n_3.



Выделим луч *1*, падающий на верхнюю поверхность пленки в точке A под углом падения i_1. Часть его отражается (нас она интересовать пока не будет), а остальная часть формирует преломленный луч с углом преломления i_2. Преломленный луч отражается в точке B (теперь мы проигнорируем преломленный луч), приходит в точку C, вновь преломляется, образуя луч *1′*.

[1] Поскольку $\Delta t_ц = \Delta l_ц / c$, а $\delta\omega = c\delta k$.
[2] Будем считать что она ограничена параллельными плоскостями в интересующей нас области.

Допустим, что в точку C приходит луч *2*, принадлежащий тому же фронту плоской волны [1] *AD*, так что лучи *1* и *2* параллельны и их фазы в точках A и D одинаковы. Нас будет интересовать только отраженная часть $2'$ луча *2*.

Лучи $1'$ и $2'$ идут совместно, так что могут интерферировать. Для того чтобы выяснить будет ли эта интерференция конструктивной или деструктивной нужно найти оптическую разность хода этих лучей, чем мы сейчас и займемся.

Первый луч от точки A проходит дополнительный путь ABC в среде с показателем преломления n_2, оптическая длина этого пути равна
$L_1 = 2n_2 h/\cos(i_2) + (\lambda/2)$. [2]

Второй луч от точки равных фаз D проходит дополнительный путь DC в среде n_1. Заметив, что длина отрезка AC равна $2h \cdot tg(i_2)$, и используя закон Снеллиуса для преломления лучей

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \qquad (33)$$

Закон Снеллиуса

вычисляем оптическую длину пути

$$L_2 = 2n_1 h \cdot tg(i_2) \cdot \sin(i_1) + \left(\frac{\lambda}{2}\right) = 2n_2 h sin(i_2) tg(i_2) + (\lambda/2)$$ [3].

и оптическую разность хода

$$\Delta = L_1 - L_2 = 2n_2 h \frac{1}{\cos(i_2)} (1 - \sin^2(i_2) + \left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Окончательно,

$$\Delta = 2n_2 h \cos(i_2) + (\lambda/2), \qquad (34)$$

Оптическая разность хода

причем слагаемое $\lambda/2$ присутствует, если *ровно один луч* отражается от оптически более плотной среды, т.е. если

$$n_1 < n_2 > n_3 \text{ или } n_1 > n_2 < n_3. \qquad (35)$$

Когда надо писать $+\lambda/2$

Формулу (34) с помощью закона Снеллиуса (33) можно переписать через угол падения i_1:

$$\Delta = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(i_1)} + (\lambda/2). \qquad (36)$$

Для того, чтобы получить интерференционную картину, необходимо, чтобы оптическая разность хода изменялась. Есть два основных способа.

---

[1] Вопросом пространственной когерентности мы займемся чуть позже.

[2] Слагаемое $\lambda/2$ появляется, конечно, если $n_3 > n_2$.

[3] Слагаемое $\lambda/2$ появляется, конечно, если $n_2 > n_1$.

1) Освещать тонкую пленку рассеянным светом, т.е. варьировать угол падения и собирать линзой отраженные параллельные лучи в одной точке экрана, то располагать экран в фокальной плоскости этой линзы. Образующаяся картина называется «линиями (или полосами) равного наклона».

Полосы равного наклона

2) Освещать тонкую пленку параллельным пучком света, но варьировать толщину пленки, например, придав ей форму клина с очень маленьким углом при основании. Линии образуют лучи, отраженные от областей клина с одной толщиной, а картина так и называется – «полосы равной толщины». Из-за того, что плоскости, ограничивающие тонкую пленку не параллельны, луч 1, отраженный от пленки в точке A (раньше мы его игнорировали) пересечется с лучом $1'$ вблизи поверхности клина, то же верно и для других лучей. Точки таких пересечений образуют плоскость вблизи поверхности клина, на которой локализуется картина интерференции.[1]Для такой картины проблемы пространственной когерентности в принципе нет, так как лучи интерферируют «сами с собой». Однако, если радиус когерентности света недостаточен, то поймать эту картину очень сложно. Примером полос равной толщины могут служить *кольца Ньютона* – **обязательно почитать о них самостоятельно**.

Полосы равной толщины

Кольца Ньютона

На нашем рисунке видно, что интерферировать «собираются» лучи, расстояние между которыми равно длине отрезка AD, поэтому условие пространственной когерентности выглядит так:

$$2h \cdot tg(i_2) \cdot \cos(i_1) < \rho_{\text{когер}}.$$

Чем меньше угол падения, тем лучше условия для наблюдения. При угле падения $\approx \pi/4$ для наблюдения интерференции от солнечных лучей толщина пленки должна быть меньше 50мкм. При малых углах падения эта толщина может быть существенно больше.

Условие пространственной когерентности при интерференции в тонких пленках

[1] Раньше говорили «картина локализована на поверхности клина». «Плоскость», о которой идет речь, при выполнении условий пространственной когерентности имеет некоторую толщину, которая уменьшается при уменьшении радиуса пространственной когерентности света.

Теперь обратимся к условию временной когерентности. Когда можно наблюдать глазом, например, кольца Ньютона в солнечном свете? Если посмотреть на формулу (29), то возникает вопрос, что взять в качестве ширины спектра $\delta\lambda$ солнечного света. Если весь диапазон, то оптическая разность хода должна быть меньше длины волны, что, конечно, немыслимо. Спасает ситуацию способность глаза различать близкие цвета, разность длин которых $\sim 20A = 2 \cdot 10^{-9}$м. Если наложение максимумов на минимумы происходит при большей разности длин волн излучения, то ничего страшного не будет – глаз воспримет это как новый цвет. Подставив приведенное значение в качестве $\delta\lambda$ в формулу (29), получаем на длине волны $\sim 5 \cdot 10^{-7}$м условие

$$\Delta \lesssim 10^{-4}\text{м},$$

что вполне возможно (см. (34)). Интересно заметить, что картина при этом будет цветная, но цвета – отнюдь не радужные.