

Дифракция

Волновая природа света проявляется в его способности в определенных условиях огибать препятствия, так что появляется освещенность в области геометрической тени.

Явление отклонения световых лучей от прямолинейного распространения (как предполагается в геометрической оптике), если оно не вызвано отражением, преломлением или рефракцией¹ называется дифракцией.

Обращаю внимание – слово «дифракция» пишется с одним «ф».²

Для знакомства с теорией дифракции Френеля нам понадобится одна формула, с которой, скорее всего, вы на математике не встречались.

Математическое отступление

Весь мелкий текст можно пропустить.

Основы теории *сходящихся* рядов заложил великий французский математик Коши (1789-1857). Поскольку сам он не видел проку от *расходящихся* рядов, а авторитет его среди математиков просто огромен, даже упоминание таких рядов в базовых учебниках математики вплоть до XX века было весьма редким. И это несмотря на то, что другой, по мнению многих, не менее великий математик Пуанкаре (1854-1912) обратил внимание на то, что среди расходящихся рядов есть особые, *асимптотические*, которые так могут быть очень полезными при вычислениях. Начиная с этого времени, асимптотические разложения стали часто применяться для анализа и вычисления специальных функций, особенно в бесконечной точке.³ Во второй половине XX века ситуация резко изменилась, асимптотические методы стали применяться все шире и шире. Одна из причин⁴ – развитие компьютерной техники. Оказалось, что *сходящиеся* ряды – не са-

¹ Рефракцией называется плавное преломление световых лучей при непрерывном изменении показателя преломления. Если поперечный размер препятствия меньше длины волны, то говорят о рассеянии, а не о дифракции.

² Каждый год кто-нибудь на экзамене пишет больше одного «ф».

³ Отсюда и пошло неверное представление о том, что асимптотические разложения приспособлены именно к анализу функций «на бесконечности».

⁴ Есть, конечно, и другие причины возрастающего интереса к асимптотическим методам. Например, интенсивно развиваются методы приближенного и даже качественно анализа дифференциальных уравнений, представляющие значительный интерес для современной науки.

Дифракция

Чуть-чуть истории

мый хороший способ приближенных вычислений, поскольку в тех случаях, когда они существуют, можно построить другие, гораздо более эффективные аппроксимации. Например, замечательный ряд Тейлора для экспоненты практически никогда не используется при ее компьютерном вычислении.¹ В тех же случаях, когда нет подходящего сходящегося ряда, как правило, трудно найти хорошие аппроксимации, отличные от асимптотических рядов.

Говорят, что функция $f(x)$ *разлагается в асимптотический ряд* по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ в окрестности точки x_0

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (1)$$

если при любом целом $N > 0$

$$f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) = o(\varphi_N(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0 \quad (2)$$

В качестве точки x_0 чаще всего берутся нуль или бесконечность.

Напомним, что по определению сходимость ряда – это сходимость последовательности частичных сумм. Этим достигается основное свойство сходящихся рядов – чем больше будет взято членов в частичную сумму, тем лучше будет приближение к раскладываемой функции. Асимптотические ряды – расходящиеся, их члены могут даже *расти* при росте n и фиксированном x . Отсюда следует, что простое увеличение числа членов (N в формуле (2)), вообще говоря, не будет приводить к улучшению аппроксимации функции $f(x)$ и может ее даже ухудшить. Так в чем же смысл применения асимптотических разложений? Само определение (1), (2) показывает, что приближение функции асимптотическим рядом становится все лучше и лучше по мере приближения точки x к x_0 (в случае бесконечной точки – по мере увеличения модуля x). Что же касается зависимости качества аппроксимации от числа N членов частичной суммы, то, вообще говоря, при фиксированном x существует некоторое оптимальное значение N_0 , при котором приближение оказывается наилучшим. Обычно при увеличении индекса n модули членов асимптотического ряда сначала убывают, а с некоторого момента начинают возрастать. Индекс N_0 примерно соответствует минимальному по модулю члену ряда.²

Мы, конечно, не имеем возможности углубляться в теорию асимптотических рядов, но нам понадобится один простейший случай, которым мы и займемся.

Асимптотический
ряд

¹ Вместо функции e^x обычно вычисляется $2^x = e^{x \cdot \ln(2)}$. При этом для аргументов, меньших единицы, используется, например, очень хорошее рациональное приближение (Паде), а далее применяется свойство $2^{n+x} = 2^n \cdot 2^x$, причем умножение на 2^n сводится просто к сдвигу битов порядка в числе с плавающей запятой.

² Для знакопередающихся асимптотических рядов оказывается верным утверждение из теории сходящихся рядов: погрешность приближения не превосходит модуля первого отброшенного члена.

Лемма Римана – Лебега утверждает, что если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на некотором интервале (в том числе бесконечном), то при $k \rightarrow \infty$

$$\int_a^b f(x) \cos(kx) dx \rightarrow 0, \quad \int_a^b f(x) \sin(kx) dx \rightarrow 0,$$

или, объединяя эти два интеграла,

$$\int_a^b f(x) e^{ikx} dx \rightarrow 0. \quad (3)$$

Чтобы понять, почему это происходит, достаточно вспомнить геометрическую интерпретацию определенного интеграла как площадь (со знаком) под интегрируемой функцией. Если $f(x) = 1$, то площади внутри интервала компенсируются на периоде $T = 2\pi/k$, а некомпенсированными остаются только площади вблизи концов интервала интегрирования, максимальная длина которых уменьшается при $k \rightarrow \infty$. Это ясно видно из формулы интегрирования

$$\int_a^b \cos(kx) dx = (\sin(kb) - \sin(ka))/k.$$

Все сказанное справедливо и в отношении интеграла с любой интегрируемой функцией $f(x)$: рано или поздно ее изменение на уменьшающемся периоде окажется как угодно малым и площади будут компенсироваться с любой заданной точностью.¹

Применим процедуру интегрирования по частям к интегралу (3), полагая, что необходимые производные функции $f(x)$ существуют и интегрируемы.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{ikx} dx &= \\ \frac{1}{ik} (f(b) e^{ikb} - f(a) e^{ika}) - \frac{1}{ik} \int_a^b f'(x) e^{ikx} dx &= \\ \frac{1}{ik} (f(b) e^{ikb} - f(a) e^{ika}) - \frac{1}{ik} ((f'(b) e^{ikb} - f'(a) e^{ika}) - & \\ \frac{1}{ik} \int_a^b f''(x) e^{ikx} dx). \end{aligned}$$

Этот процесс можно продолжить. В частности, если функция $f(x)$ дифференцируема бесконечное число раз, то получится асимптотический ряд.² Видно, что каждый последующий член разложения имеет дополнительный множи-

¹ Это, конечно, не доказательство, а пояснение.

² Этот ряд расходится, но можно показать, что удовлетворяет условию (2).

тель $\frac{1}{k}$, так что при $k \rightarrow \infty$ становится как угодно малым по сравнению с предыдущим.

Для наших целей достаточно первого члена, так что будем считать, что:

$$\int_a^b f(x)e^{ikx} dx \approx \frac{1}{ik}(f(b)e^{ikb} - f(a)e^{ika}). \quad (4)$$

Рабочая формула

Не вдаваясь в подробности, скажем, что эта формула хорошо работает в двух случаях (при общем условии, что функция $f(x)$ и ее производные не имеет особенностей):

- 1) если $k|b - a| \gg 1$;
- 2) если функция $f(x)$ незначительно меняется на интервале интегрирования; если, например, $f(x) = f_0 = const$, то формула (4) становится точной.

Анализ показывает, что в интересующем нас случае формула (4) дает приемлемое приближение и в промежуточной области, хотя использовать ее в этой области мы не будем.

Выделением действительной и мнимой части формулы (4) получаются следующие приближенные равенства

$$\int_a^b f(x)\cos(kx) dx \approx \frac{1}{k}(f(b)\sin(kb) - f(a)\sin(ka)),$$

$$\int_a^b f(x)\sin(kx) dx \approx -\frac{1}{k}(f(b)\cos(kb) - f(a)\cos(ka))$$

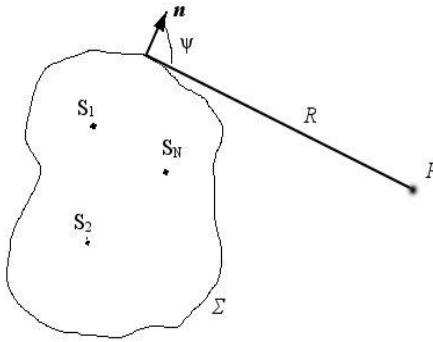
Принцип Гюйгенса - Френеля

Пусть на пути распространения света стоит препятствие, например, диафрагма или какой-либо другой экран, перекрывающий *часть* пучка. Как рассчитать поле за этим препятствием? Ответ на этот вопрос впервые был предложен Френелем в 1818г.

Метод, примененный Френелем, основан на принципе Гюйгенса - Френеля, который я изложу с некоторыми незначительными поправками, следующими из дальнейшего развития его идей.¹ Его можно разбить на 2 части.

¹ Принцип Гюйгенса - Френеля был обобщен Рэлеем, оставаясь феноменологическим подходом вплоть до работ Кирхгофа, в которых была дано его математическое обоснование и уточнены приведенные ниже интегралы.

1. Если окружить систему когерентных источников произвольной замкнутой поверхностью Σ ,¹ то каждую точку



этой поверхности можно считать источником вторичных когерентных сферических волн распространяющихся по всем направлениям. Амплитуда этих волн на поверхности находится как суперпозиция волн, идущих

от первичных источников. Световое поле в любой точке P вне этой поверхности можно рассчитывать как суперпозицию всех вторичных волн.

Фактически, это просто математическое утверждение, и пока не видно, что оно нам дает: ведь рассчитать поле в точке P можно просто складывая поля первичных источников света. Вся суть во второй части принципа.

2. Если часть этой поверхности закрыта непрозрачным экраном, то учитывать нужно только волны, идущие от открытых частей поверхности.²

Обе эти части принципа объединяет интеграл Рэлея

$$E(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma'} \tilde{K}(\psi) E(Q) \frac{e^{ikR}}{R} d\sigma \quad (5)$$

Здесь Σ' - открытая часть поверхности Σ , Q - точка на Σ' ,

$E(Q) \frac{e^{ikR}}{R}$ - сферическая волна, идущая от этой точки, причем ее амплитуда $E(Q)$ - световое поле в этой точке, создаваемое первичными источниками, $d\sigma$ - элемент поверхности Σ .

Функция $\tilde{K}(\psi)$ медленно меняется от единицы при $\psi = 0$ (на передней, ближайшей к точке P , части замкнутой поверхности, см. рис.) до нуля при $\psi = \pi$ (на противоположной стороне поверхности).³

Скажу, что дифракционные интегралы - это чисто математические результаты, физически никаких вторичных

Дифракционный интеграл Рэлея

¹ Буквой S в оптике обозначаются источники света.

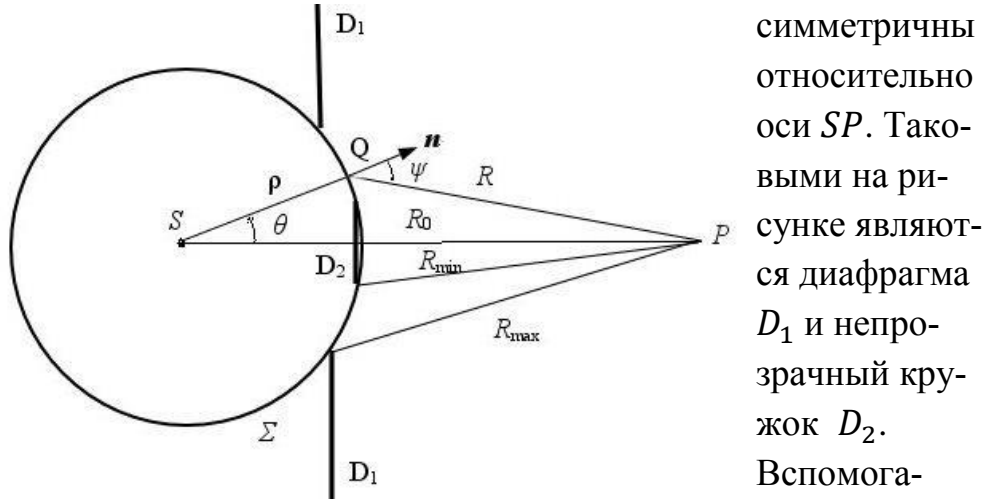
² Точнее, нужно учитывать лучи, не встречающие непрозрачных преград на своем пути от поверхности до точки наблюдения. В дальнейших формулах мы не будем писать множитель $e^{-i\omega t}$, так как он, как всегда, исчезнет при переходе к интенсивности.

³ Именно для того, чтобы $\tilde{K}(0) = 1$, введен, как мы увидим, множитель $1/i\lambda$. Френель чуть-чуть ошибался, считая, что нужно учитывать только волны от передней части поверхности.

волн нет. Интересно, например, отметить, что множитель $1/i$ перед интегралом (5) говорит о том, что вторичные волны опережают приходящие от источника по фазе на $\pi/2$.

Интеграл (5) можно использовать для расчетов, только если расстояние от препятствий существенно больше длины волны света.

Мы рассмотрим простейший случай – поле от точечного источника S в точке наблюдения P , когда все препятствия



симметричны относительно оси SP . Такими на рисунке являются диафрагма D_1 и непрозрачный кружок D_2 . Вспомога-

тельной поверхностью служит сфера Σ радиуса ρ . Расстояние от этой сферы до точки P будем обозначать R_0 .

На открытом участке текущее значение расстояния R от вторичного источника на сфере до точки P меняется от R_{min} до R_{max} , а угол θ – от θ_{min} до θ_{max} .

От источника S распространяется сферическая волна, и на сфере она принимает вид $E(Q) = E_S e^{ik\rho} / \rho$. После интегрирования по углу φ сферической системы координат с центром в точке S интеграл (5) по открытой части поверхности принимает вид

$$E(P) = \frac{2\pi}{i\lambda} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \tilde{K}(\psi) \frac{E_S e^{ik\rho}}{\rho} \frac{e^{ikR}}{R} \rho^2 \sin(\theta) d\theta. \quad (6)$$

Перейдем в этом интеграле от переменной θ к переменной R .

Из треугольника SQP по теореме косинусов имеем

$$R^2 = \rho^2 + (\rho + R_0)^2 - 2\rho(\rho + R_0)\cos(\theta)$$

и берем дифференциал от левой и правой части

$$2RdR = 2\rho(\rho + R_0) \sin(\theta) d\theta$$

и подставляем $\sin(\theta) d\theta = \frac{RdR}{\rho(\rho+R_0)}$ в интеграл (6):

$$E(P) = \frac{2\pi E_S e^{ik(\rho+R_0)}}{i\lambda(\rho+R_0)} \int_{R_{min}}^{R_{max}} K(R) e^{ik(R-R_0)} dR. \quad (7)$$

Функция $K(R)$ – это то, во что перешла функция $\tilde{K}(\psi)$ при сделанной замене переменных. Ее явный вид для нас не очень важен.¹ Подчеркнем только, что она медленно и монотонно меняется от единицы до нуля, причем

$$K(R_0) = 1 \text{ и } K(R_0 + 2\rho) = 0. \quad (8)$$

Мы дополнительно вынесли за интеграл множитель $\frac{e^{ikR_0}}{R_0}$, чтобы выделить величину

$$E_0 = \frac{E_S e^{ik(\rho+R_0)}}{(\rho+R_0)}, \quad (9)$$

имеющую очевидный физический смысл: это сферическая волна от первичного источника S , пришедшая в точку наблюдения P , т.е. поле в этой точке в отсутствие каких-либо преград.

К интегралу в формуле (7) применим нашу рабочую формулу (4):

$$\int_{R_{min}}^{R_{max}} K(R) e^{ik(R-R_0)} dR = \frac{1}{ik} (K(R_{max}) e^{ik(R_{max}-R_0)} - K(R_{min}) e^{ik(R_{min}-R_0)}). \quad (10)$$

Подставляем (9) и (10) в соотношение (7) и окончательно получаем (далее вместо $E(P)$ будем просто писать E)²

$$E = E_0 (K(R_{min}) e^{ik(R_{min}-R_0)} - K(R_{max}) e^{ik(R_{max}-R_0)}). \quad (11)$$

Пусть $I_0 \propto E_0 \cdot E_0^*$ - интенсивность в точке наблюдения в отсутствие преград, тогда интенсивность в точке наблюдения записывается так

$$I = I_0 ((K(R_{min}))^2 + (K(R_{max}))^2 - 2K(R_{min})K(R_{max}) \cos(k(R_{max} - R_{min}))). \quad (12)$$

Сначала проверим, что наша формула (11) дает правильный результат в отсутствие препятствий. В этом случае $R_{min} = R_0$ и $R_{max} = R_0 + 2\rho$, так что согласно условиям (8)

$K(R_{min}) = 1$ и $K(R_{max}) = 0$,
и $E = E_0$, как и должно быть.³

Поле в отсутствие преград

Главная формула

¹ В рассматриваемом нами случае $\tilde{K}(\psi) = (1 + \cos(\psi))/2$, а

$$K(R) = \frac{(2\rho+R_0-R)(R_0+R)}{4\rho R}.$$

² Используем равенство $k\lambda = 2\pi$, а знак минус убираем переменной мест слагаемых.

³ Именно сейчас мы понимаем, что множитель $\frac{1}{i\lambda}$ в интеграле Рэлея (5) необходим, чтобы обеспечить равенство $K(R_0) = 1$.

Теперь попробуем убрать диафрагму и оставить только кружок D_2 , перекрывающий осевые лучи. В этом случае опять $K(R_{max}) = 0$ и

$$E = E_0 \cdot K(R_{min})e^{ik(R_{min}-R_0)},$$

а для интенсивности $I \propto EE^*$ получаем

$$I = I_0(K(R_{min}))^2,$$

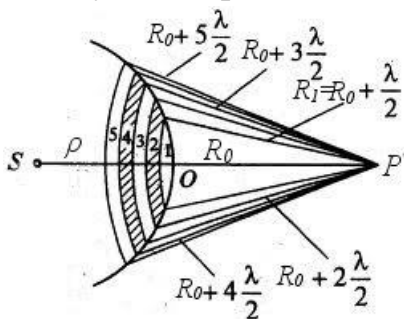
т.е. если перегородить прямой путь к точке наблюдения, то за преградой всегда будет светлое пятно. Этот эффект называется *пятном Араго – Пуассона*, и про его открытие рассказывают что-то вроде анекдота.

Пятно Араго -
Пуассона

Во время доклада Френеля Пуассон обратил внимание на то, что из этой теории следует наличие светлого пятна за препятствием, счел это результат бессмысленным и раскритиковал Френеля. Хитрый Араго быстренько сбегал в свою лабораторию, поставил эксперимент, прибежал обратно и провозгласил «а пятно-то есть!». ¹Как же несправедливы бывают историки физики, порой говоря «пятно Пуассона» без упоминания бедного Араго!

Зоны Френеля

Оставим теперь на пути света только диафрагму. Суть наблюдаемого эффекта заключается в том, что при изменении в определенных пределах ² радиуса диафрагмы в точке P на оси наблюдается то светлое, то темное пятно. Для объяснения этого эффекта Френель предложил разбить вспомогательную поверхность на зоны, названные его именем. Первая зона Френеля представляет собой шапочку на сфере, граница которой отстоит от точки P на расстоянии $R_1 = R_0 + \lambda/2$, так что ей принадлежат все точки сферы в пределах ³



$R_0 < R < R_0 + \lambda/2$. Все остальные

¹ В те времена (1818г.) быстро поставить такой эксперимент было невозможно из-за отсутствия хороших когерентных источников. Историки говорят, что Араго потребовалась неделя.

² Об этих пределах мы поговорим чуть позже.

³ При желании можно писать знак \leq вместо знака $<$. Это все равно. Кстати, подумайте почему.

зоны – пояса. Вторая зона задается условиями

$$R_0 + \lambda/2 < R < R_0 + 2\lambda/2,$$

ее внешняя граница удалена от точки наблюдения на расстояние

$R_2 = R_0 + 2\lambda/2$. Вообще, точки m -ой зоны удовлетворяют условиям

$$R_{m-1} < R < R_m,$$

где

$$R_m = R_{m-1} + \lambda/2 = R_0 + m \cdot \lambda/2.$$

Договоримся коэффициент $K(R_m)$ на внешней границе m -ой зоны записывать кратко

$$K_m = K(R_m),$$

и, конечно,

$$K_0 = K(R_0) = 1.$$

Вычислим по нашей главной формуле (11) поле в точке наблюдения, если диафрагма открывает как раз одну первую зону Френеля. В этом случае $R_{min} = R_0$, $R_{max} = R_0 + \lambda/2$, $e^{ik(R_{min}-R_0)} = 1$, $e^{ik(R_{max}-R_0)} = e^{ik\lambda/2} = e^{i\pi} = -1$, так что поле от первой зоны Френеля есть

$$E^{(1)} = E_0(1 + K_1). \quad (13)$$

Поле от первой зоны Френеля

Для второй зоны $R_{min} = R_0 + \lambda/2$, $R_{max} = R_0 + \lambda$, $e^{ik(R_{min}-R_0)} = -1$, $e^{ik(R_{max}-R_0)} = e^{ik\lambda} = e^{i2\pi} = 1$ и формула (11) дает

$$E^{(2)} = -E_0(K_1 + K_2). \quad (14)$$

Поле от второй зоны Френеля

Вообще, для m -ой зоны $R_{min} = R_0 + (m-1)\lambda/2$, $R_{max} = R_0 + m\lambda$, $e^{ik(R_{min}-R_0)} = e^{\frac{i(m-1)k\lambda}{2}} = e^{i(m-1)\pi} = (-1)^{m-1}$, $e^{ik(R_{max}-R_0)} = e^{ikm\lambda/2} = e^{im\pi} = (-1)^m$, так что

$$\begin{aligned} E^{(m)} &= E_0((-1)^{m-1}K_{m-1} - (-1)^mK_m) = \\ &= E_0(-1)^{m-1}(K_{m-1} + K_m). \end{aligned}$$

Поле от m -ой зоны Френеля

Мы видим, что поле в точке наблюдения от любой зоны Френеля колеблется в противофазе с полем соседней зоны, поэтому если открытыми оказываются две соседние зоны, то они интерферируют деструктивно. В этом и была идея Френеля полстроения таких зон. Пусть, например, диафрагма открывает как раз две первые зоны Френеля. Чтобы получить результирующее поле, мы можем поступить двояко: либо воспользоваться общей формулой (11), либо просто сложить поля от первой (13) и второй (14) зон:

$$E^{(1..2)} = E_0(1 - K_2).$$

Вообще, если диафрагма открывает четное число $2m$ зон Френеля, то

$$E^{(1..2m)} = E_0(1 - K_{2m})$$

а при нечетном числе $2m + 1$ открытых зон

$$E^{(1..2m+1)} = E_0(1 + K_{2m+1}).$$

В пределах нескольких зон коэффициент K можно считать постоянным¹, в частности для первых зон можно полагать $K = 1$. Тогда

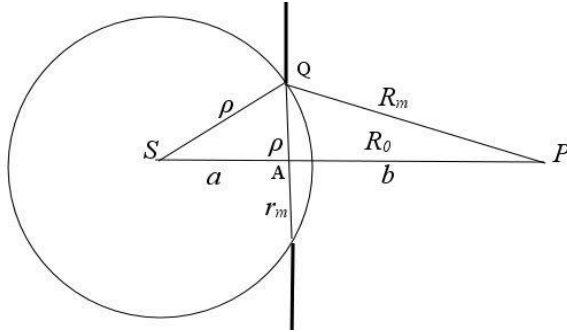
$$E^{(1)} \approx 2E_0, E^{(2)} \approx -2E_0, E^{(1..2)} \approx 0,$$

а для интенсивностей получится

$$I^{(1)} \approx 4I_0, I^{(2)} \approx 4I_0, I^{(1..2)} \approx 0.$$

Обратим внимание, что при изменении радиуса диафрагмы нужно строить другую вспомогательную сферу (см. [рис.](#)) или передвигать саму диафрагму. Это неудобно, поэтому мы пересчитаем наши результаты на плоскую диафрагму, а именно, поставим вопрос так: каков должен быть радиус плоской неподвижной диафрагмы r_m , чтобы она открывала m зон Френеля (m – не обязательно целое число!).

Посмотрим на рисунок. Условие, что открыто m зон



Френеля, как мы знаем, записывается так:

$$R_m - R_0 = m\lambda/2. \quad (15)$$

Выразим разность $R_m - R_0$ через расстояние a от источника S до диафрагмы и

расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения P . Из треугольника AQP находим, применяя все то же разложение Тейлора, поскольку должны выполняться условия

$$r_m \ll a \text{ и } r_m \ll b:$$

$$R_m = \sqrt{b^2 + r_m^2} \approx b\left(1 + \frac{r_m^2}{2b^2}\right).$$

Пересчет на радиус диафрагмы

¹ Если $R = R_0 + x$, $x \ll R_0, \rho$, то разложение Тейлора формулы для коэффициента $K(R)$ (см. [примечание](#)) дает $K(R) \approx 1 - \frac{x}{2\rho} - \frac{x}{2R_0}$. Поскольку для нескольких зон Френеля величина x порядка нескольких длин волн, то это утверждение следует из того, что $\lambda \ll R_0$ и $\lambda \ll \rho$.

Поскольку $R_0 = a + b - \rho$, то сначала из треугольника AQS найдем ρ :

$$\rho = \sqrt{a^2 + r_m^2} \approx a \left(1 + \frac{r_m^2}{2a^2}\right),$$

так что

$$R_0 \approx b - \frac{r_m^2}{2a},$$

и, переставя писать знак приближенного равенства,

$$R_m - R_0 = \frac{r_m^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Приравнивая правые части (15) и последнего равенства, получаем

$$r_m^2 = \frac{mab}{a+b}$$

или

$$r_m = \sqrt{\frac{mab}{a+b}} \lambda. \quad (16)$$

В частном (но важном) случае, когда источник находится очень далеко от диафрагмы ($a \rightarrow \infty$), т.е. на нее падает параллельный пучок света, формула (16) принимает вид

$$r_m = \sqrt{mb\lambda},$$

а для числа открытых зон m получаем

$$m = \frac{r_m^2}{b\lambda}. \quad (17)$$

Если диафрагма закрыта, то понятно, что за ней нет никакой волны. Будем постепенно ее открывать. В точке наблюдения будет монотонно расти освещенность. В этой области ($m \ll 1$) на оси ничего интересного не происходит, но на экране наблюдаются кольца – дифракция уже есть и в этих условиях она называется *дифракцией Фраунгофера*. Мы уже устремили источник в бесконечность. Если $m \ll 1$, то и точка наблюдения очень далеко ($b \rightarrow \infty$). На диафрагму падает почти параллельный пучок света, и за диафрагмой распространяются лучи параллельные лучи в различных направлениях. Поэтому дифракцию Фраунгофера еще называют дифракцией в параллельных лучах.

Так будет продолжаться до тех пор, пока число m не станет равным единице – это максимум, соответствующий одной открытой зоне Френеля. Далее последует минимум с почти нулевой интенсивностью (две открытые зоны), и за-

Радиус диафрагмы, открывающей m зон Френеля

Число зон Френеля

Дифракция Фраунгофера
 $m \ll 1$

тем максимумы, уменьшаясь по интенсивности, будут чередоваться с минимумами, которые все больше и больше будут отличаться от нуля. Дифракция в условиях, когда число m равняется нескольким единицам, называется *дифракцией Френеля*.

Дифракция Френеля

Наконец, при дальнейшем увеличении радиуса диафрагмы интенсивность становится равной интенсивности в отсутствие преград, лучи распространяются прямолинейно, так что при $m \gg 1$ мы переходим в область *геометрической оптики*.

Геометрическая оптика
 $m \gg 1$

Внутренней «полузоной» 1-ой зоны Френеля в задачниках называют точки вспомогательной сферы, расстояния R от которых до точки наблюдения удовлетворяют условию

$$R_0 < R < R_0 + \lambda/4.$$

На внешней границе этой «полузона» имеем

$$e^{ik(R_{max}-R_0)} = e^{ik\lambda/4} = e^{i\pi/2} = i.$$

Будем считать, что коэффициент $K \approx 1$, тогда световое поле от этой «полузона» по [главной формуле](#) (11) запишется так:¹

$$E_{1/2}^{(1,i)} = (1 - i)E_0 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}. \quad (18)$$

Далее следует внешняя «полузона» 1-ой зоны Френеля, внешняя граница которой совпадает с внешней границей всей зоны, и т.д. Убедитесь, что

$$\begin{aligned} E_{1/2}^{(1,e)} &= (1 + i)E_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \\ E_{1/2}^{(2,i)} &= (-1 + i)E_0 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}, \\ E_{1/2}^{(2,e)} &= (-1 - i)E_0 = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}. \end{aligned}$$

Мы уже привыкли к комплексной записи, более того, не пишем множитель, зависящий от времени, работаем только с комплексными амплитудами. Пора вспомнить, что под этим всем подразумевается. В качестве примера используем формулу (18) и будем считать, что начальная фаза источника равна нулю.

Вспомним, что такое E_0 (9), восстановим временной множитель

$$\tilde{E}(P) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \frac{E_S e^{ik(\rho+R_0)}}{(\rho+R_0)} e^{-i\omega t},$$

и возьмем то, что под этим подразумевается, т.е. действительную часть:

¹ В верхнем индексе i – *internal*, внутренний, а e – *external*, внешний.

$$E(P) = \sqrt{2}E_S \cos(\omega t - k(\rho + R_0) + \pi/4).^1$$

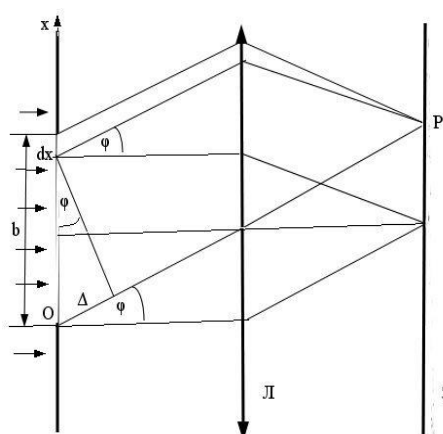
А что если изготовить, используя формулу (16), такую пластинку (она называется *зонной*), которая бы пропускала для заданной точки свет только, например, от нечетных зон Френеля? Тогда яркость пятна увеличилась во много раз. Можно сделать еще лучше. Можно кольца четных зон сделать не черными, а другой толщины так, чтобы фазы волн приходящих от *всех* зон Френеля были одинаковы. Такая зонная пластинка ведет себя подобно линзе с фокусами в источнике S и точке P . Ее можно сделать гибкой, и подобные «гибкие линзы» в наши дни продаются в электричках.

Зонная пластинка

Дифракция Фраунгофера на щели

Все, что мы обсуждали, касалось только интенсивности в центре картины – на оси, соединяющей источник и точку наблюдения. Сейчас мы посмотрим, что происходит на всем экране, однако только в самом простом случае дифракции Фраунгофера на бесконечной щели.

Дифракция Фраунгофера, как уже говорилось, это



дифракция в параллельных лучах. Параллельный пучок света падает нормально на плоский экран со щелью шириной b – и то, и другое перпендикулярно плоскости рисунка. За щелью расположена линза L , в фокальной плоскости которой

находится экран \mathcal{E} . Параллельные лучи, идущие от разных полос щели, собираются в полосы на экране. Например, элемент рисунка dx представляет бесконечно узкую полосу. Идущие от нее лучи, перпендикулярные плоскости щели, со-

¹ Посмотрите [сноску](#).

² В принципе, для сохранения симметрии нужно использовать длинную цилиндрическую линзу, однако часто используется обычная сферическая линза, и получить строгие полосы не удастся.

бираются в центральную полосу, а лучи, идущие под углом φ к нормали – в точку P , которая также представляет целую полосу (точнее, линию) экрана \mathcal{E} , перпендикулярную плоскости рисунка. Далее мы будем просто говорить «точка», имея в виду, что во всех плоскостях, параллельных плоскости рисунка все происходит в точности так же.

От всех элементов щели dx лучи расходятся по всем направлениям, но в отличие от дифракции Френеля их можно считать плоскими волнами. Фазы и амплитуды колебаний во всех точках щели одинаковы.¹

Линза обладает важным свойством – она не вносит дополнительной разности фаз в падающие на нее параллельные лучи, которые собираются в фокальной плоскости. Однако у лучей, идущих от различных элементов щели есть оптическая разность хода. Оптическая разность хода между лучом, идущим из элемента dx , и лучом от нижней точки щели O под углом φ к нормали равна $\Delta = x \cdot \sin(\varphi)$ (см. рис.).²

С учетом всего сказанного дифракционный интеграл можно записать так:

$$E(\varphi) = A \int_0^b e^{-ikx \sin(\varphi)} dx = A \left(\frac{e^{-ikb \sin(\varphi)} - 1}{-ik \sin(\varphi)} \right) = A e^{-\frac{ikb \sin(\varphi)}{2}} \left(\frac{e^{ikb \sin(\varphi)/2} - e^{-ikb \sin(\varphi)/2}}{ik \sin(\varphi)} \right).$$

Здесь A – некоторый коэффициент, вообще говоря, комплексный, который включает в себя амплитуду колебаний на щели и от которого мы скоро избавимся. Введем новую переменную

$$\alpha = kb \sin(\varphi)/2,$$

так что

$$E(\varphi) = A e^{-i\alpha} b \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = E_0 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}. \quad (19)$$

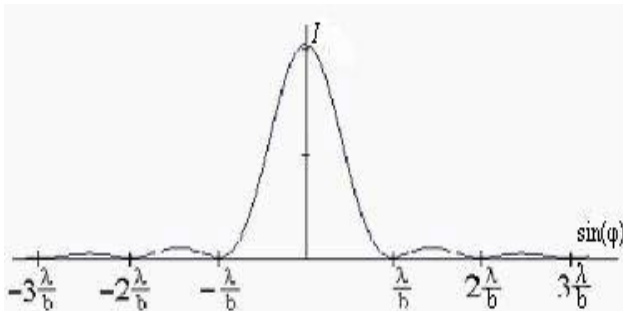
¹ Фазы одинаковы потому, что мы выбрали нормальное падение первичной волны.

² Все, что я сейчас скажу несущественно, поскольку в конце мы перейдем к интенсивности, однако в некоторых других случаях это замечание может оказаться важным. Если волна записана в виде $e^{-i\omega t} e^{ikx}$, то положительное значение произведения kx означает *отставание* по фазе (ср. $\text{Re}(e^{-i\omega t} e^{ikx}) = \cos(\omega t - kx)$). Все лучи опережают луч, идущий из точки O , поэтому просто ради корректности пишу далее знак минус в аргументах экспонент, но это не влияет на конечный результат.

Многие из вас узнали функцию $\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ хотя бы потому, что она встречалась в мелком тексте и сносках, однако сразу перейдем к интенсивности, (умножая, как всегда, на комплексно сопряженное выражение)

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2}. \quad (20)$$

Коэффициент I_0 вобрал в себя все константы, а мы сейчас выясним его физический смысл. Пусть $\varphi \rightarrow 0$, тогда $\alpha \rightarrow 0$, и $I = I_0$, так что величина I_0 – интенсивность центральной линии на экране.



Вид этой функции показан на рисунке. Минимумы находятся из условия

$$\begin{aligned} \alpha &= m\pi, \\ (m &= \pm 1, \pm 2 \dots), \\ \text{т.е. } k b \sin(\varphi) &= 2m\pi, \end{aligned}$$

или

$$b \sin(\varphi) = m\lambda. \quad (21)$$

Это условие можно было написать сразу. Пусть сначала $m = 1$. Левая часть (21) – оптическая разность хода между крайними лучами (см. [рис.](#)). Если она равна длине волны, то центральный луч идет в противофазе с крайним (оптическая разность хода между ними равна $\lambda/2$), так что каждому лучу из верхней половины щели найдется луч из нижней половины, гасящий его. Если $m = 2$, то щель надо разбить на 4 части и т.д.

Максимумы находятся, конечно, между минимумами, но не совсем посередине – надо честно дифференцировать. Первый максимум находится при $\alpha \approx 1,43\pi$, интенсивность в нем составляет $0,047I_0$. Учитывая, что он уже нулевого максимума, становится ясно, что основная часть энергии приходится именно на центральную полосу дифракционной картины.¹

Поскольку $|\sin(\varphi)| < 1$ ², то

Интенсивность при дифракции на щели

Минимумы интенсивности при дифракции на щели

¹ По этой же причине мы раньше определяли ширину спектра по первым минимумам синка. Вычисление ширины максимумов мы отложим до изучения дифракционной решетки.

² Если $\sin(\varphi) = \pm 1$, то речь идет о бессмысленных скользящих по щели лучах.

$$|m| < m_{max} = [b/\lambda], \quad (22)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Если ширина щели меньше длины волны, то ничего не видно, кроме нулевого максимума – дифракционной картины как таковой нет.¹

Чем шире щель, тем

- 1) ярче картина
- 2) меньше контрастность
- 3) уже линии
- 4) больше число максимумов.

Дифракция будет наблюдаться не только на щели, отверстиях и т.п., но и на «анти-щели» (тонкой нити), «анти-отверстии» (например, на круглом препятствии).

Перечислим условия, при которых можно наблюдать дифракцию.

Поперечный размер объекта b должен быть больше длины волны, $b > \lambda$, но не может быть и слишком большим, так как

- 1) необходимо выполнения условия пространственной (поперечной) когерентности $b < \rho_{\text{когер}}$,
- 2) должно выполняться условие временной (продольной) когерентности $b \sin(\varphi) < \lambda^2 / \delta\lambda$ или (см. (21)) $m < \lambda / \delta\lambda$. В роли ширины спектра $\delta\lambda$ может выступать цветовое разрешение глаза (см. «Интерференция в тонких пленках»).
- 3) если значение m_{max} велико, то картина теряет контрастность; при этом может еще быть наблюдаемой дифракция Френеля, либо вообще речь уже идет о [геометрической оптике](#).

Наконец, мы сделаем то, чего делать **нельзя**. Мы оценим из формулы (21), когда можно использовать геометрическую оптику, т.е. когда можно считать, что лучи распространяются прямолинейно. Формулу (21) для этой цели применять, строго говоря, нельзя, потому что она получена для дифракции Фраунгофера, т.е. когда открыта только малая часть первой зоны Френеля, а геометрическая

Максимальный порядок дифракции

Как картина дифракции зависит от ширины щели

Условия наблюдения дифракции

¹ Помните, мы говорили, что в этом случае говорят о рассеянии, а не о дифракции.

оптика – противоположный предельный случай. Нас оправдывают два обстоятельства. Во-первых, наша оценка будет в полном согласии с определением области [геометрической оптики](#), основанном на большом числе открытых зон Френеля. Это происходит потому, что *качественная* картина дифракции Френеля (из которой можно делать переход к геометрической оптике) в нужных нам моментах совпадает с картиной дифракции Фраунгофера. Во-вторых, нам легче будет понять, почему большое число открытых зон Френеля соответствует прямолинейному распространению света.

Если бы свет распространялся прямолинейно, то за щелью шел бы волновой фронт ширины b (а за отверстием – пучок света такого же диаметра, что и отверстие). Из-за дифракции свет отклоняется на угол, который можно оценить по формуле (21), полагая, что отклонение луча небольшое, и $\sin(\varphi) \approx \varphi$.¹ Тогда $\varphi \sim \lambda/b$, и на расстоянии l луч отклонится от прямой линии на расстоянии $r \sim l\varphi = l\lambda/b$. Чтобы можно было пользоваться геометрической оптикой, это отклонение должно быть существенно меньше ширины пучка, т.е. должно быть

$$l\lambda/b \ll b$$

или

$$b^2/\lambda l \gg 1. \quad (23)$$

Проверьте, используя формулу (17), что с точностью до обозначений это условие совпадает с условием для [геометрической оптики](#) через число открытых зон Френеля.

Предельный переход к геометрической оптике

Дифракционная решетка

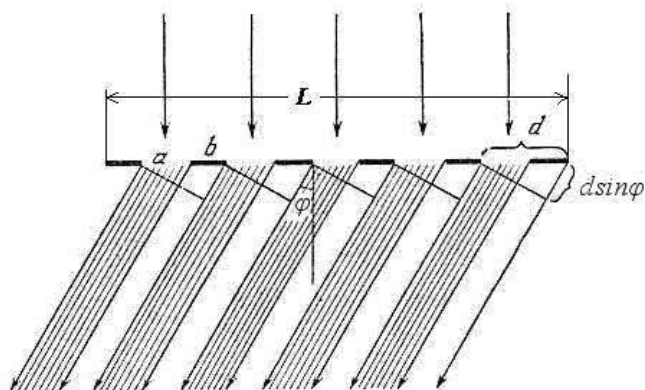
Дифракционная решетка представляет собой простой² спектральный прибор, т.е. прибор, позволяющий исследовать спектральный состав света.³ Она позволяет различать компоненты, которые для глаза кажутся одного цвета.

¹ Вспомним, что основной поток энергии распространяется в пределах максимума нулевого порядка.

² Простой, по крайней мере, теоретически. Изготовление хороших решеток непростая задача.

³ С простейшим спектральным прибором – призмой – знакомы, конечно, все.

Дифракция Фраунгофера – дифракция в параллельных лучах, и поэтому она обладает важным свойством: дифракционные картины от двух смещенных друг относительно друга



объектов накладываются друг на друга без смещения. Именно это свойство используется в дифракционной решетке, представляющей собой большое количество N одинаковых

щелей, расстояние между которыми постоянно.¹ Расстояние d между серединами соседних щелей называется *периодом* решетки. Ширину щели, как и раньше, будем обозначать буквой

Пусть $E^{(1)}(\varphi)$ – световое поле (19), посылаемое одной щелью² под углом φ к нормали (см. рис.). Тогда поле от N щелей находится как суперпозиция³

$$E^{(N)}(\varphi) = E^{(1)}(\varphi)(1 + e^{ik\Delta} + \dots + e^{ik(N-1)\Delta}),$$

где

$$\Delta = d\sin(\varphi)$$

– оптическая разность хода между лучами, идущими от соседних щелей. Замечая, что слагаемые в скобке образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{ik\Delta}$ и суммой

$$\frac{1 - e^{iNk\Delta}}{1 - e^{ik\Delta}} = \frac{e^{iNk\Delta/2}}{e^{ik\Delta/2}} \cdot \frac{e^{iNk\Delta/2} - e^{-iNk\Delta/2}}{e^{ik\Delta/2} - e^{-ik\Delta/2}},$$

и вводя для удобства новую переменную

$$\delta = kdsin(\varphi)/2, \quad (24)$$

получаем

$$E^{(N)}(\varphi) = E^{(1)}(\varphi) \frac{e^{iN\delta}}{e^{i\delta}} \cdot \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}$$

или, переходя к интенсивности,

¹ Рисунки к этому параграфу взяты из книги О.С. Литвинова, К.Б. Павлова и В.С. Горелика «Электромагнитные волны и оптика» (<http://fn.bmstu.ru/data-physics/library/physbook/tom4/content.htm>). Вообще, во всех случаях, когда вы хотите получить дополнительную информацию или что-либо «изучить самостоятельно» я советую обращаться к этой книге.

² Как и в случае дифракции Фраунгофера на щели, все параллельные лучи собираются в фокальной плоскости линзы, образуя дифракционную картину.

³ Мы считаем все лучи когерентными. Подумайте, какие условия это накладывает на свет и решетку.

$$I^{(N)}(\varphi) = I^{(1)}(\varphi) \cdot \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}. \quad (25)$$

Про интенсивность $I^{(1)}(\varphi)$ от одной щели (20) нам все известно, поэтому займемся дробью с синусами.

Если $\sin(\delta)$ в знаменателе обращается в ноль, то одновременно и числитель равен нулю. Это случается тогда, когда $\delta = m\pi$, т.е. (см.(24)) когда $k d \sin(\varphi) = 2m\pi$ или

$$d \sin(\varphi_m^{max}) = m\lambda, \quad (26)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Надо раскрывать неопределенность,¹ что дает величину N^2 . Легко сообразить, что при выполнении условия (26) все щели посылают волны в одной фазе, откуда и получается такое увеличение интенсивности. Это – главные максимумы. Число m называется их *порядком*. Интенсивность в главном максимуме очень велика, так как хорошие решетки имеют плотность штрихов в несколько тысяч на миллиметр, а полное число штрихов может достигать нескольких десятков тысяч.

Поскольку синус меньше единицы (см. [примечание](#)), то число наблюдаемых главных максимумов удовлетворяет условию

$$m < d/\lambda,$$

и, аналогично дифракции от одной щели, наблюдать главные максимумы можно, только если период решетки превышает длину волны.

Числитель дроби в формуле (25) может обращаться в ноль в других точках, а именно, если

$$N\delta = p'\pi, \text{ но } \delta \neq m\pi, \\ (p' = \pm 1, \pm 2 \dots)$$

т.е. когда

$$d \sin(\varphi_{p'}^{min}) = \frac{p'}{N} \lambda, \text{ но } \frac{p'}{N} \neq m.$$

Это минимумы с нулевой интенсивностью.

Последние условия для минимумов можно записать в более удобном виде. Посмотрим, какие значения может принимать параметр p' между двумя максимумами. Если $p' = 0$, то $m = 0$, это главный максимум нулевого порядка. Далее го-

¹ Это один из редких случаев, когда правило Лопиталья удобнее разложения Тейлора.

дятся все $p' = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N - 1)$. При $p' = \pm N$ получаются симметричные главные максимумы первого порядка. Далее отношение p'/N можно записать как $1 + p/N$, причем параметр p пробегает значения $p = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N - 1)$. Далее появляются максимумы второго порядка. Продолжая это рассмотрение, мы приходим к выводу, что условия минимумов можно написать так:

$$d \sin(\varphi_{m,p}^{min}) = (m + p/N)\lambda, \quad (27)$$

Минимумы

где $p = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N - 1)$.

В частности, для ближайших к m -ому главному максимуму минимумов (мы назовем их границами линии)

$$d \sin(\varphi_{m,\pm 1}^{min}) = (m \pm 1/N)\lambda. \quad (28)$$

Границы линии

Мы видим, что между ближайшими друг к другу максимумами находится $N - 1$ минимумов. Ясно, что минимумы друг от друга отделены максимумами, и если это не главные максимумы, то они называются *побочными*.

Найдем теперь угловую ширину главного максимума $\delta\varphi$ как угловое расстояние между ближайшими к нему минимумами:

$$\delta\varphi = \varphi_{m,1}^{min} - \varphi_{m,-1}^{min}.$$

Ясно, что $\varphi_{m,-1}^{min} = \varphi_m^{max} - \delta\varphi/2$ и $\varphi_{m,1}^{min} = \varphi_m^{max} + \delta\varphi/2$.

Вычитаем формулу (28) для левого минимума из этой же формулы для правого минимума:

$$d (\sin(\varphi_m^{max} + \delta\varphi/2) - \sin(\varphi_m^{max} - \delta\varphi/2)) = 2\lambda/N,$$

или

$$d \sin(\delta\varphi/2) \cos(\varphi_m^{max}) = \lambda/N.$$

Всегда можно считать, что $\delta\varphi \ll 1$, поэтому $\sin(\delta\varphi/2) \approx \delta\varphi/2$, так что для угловой ширины максимума получается следующая формула

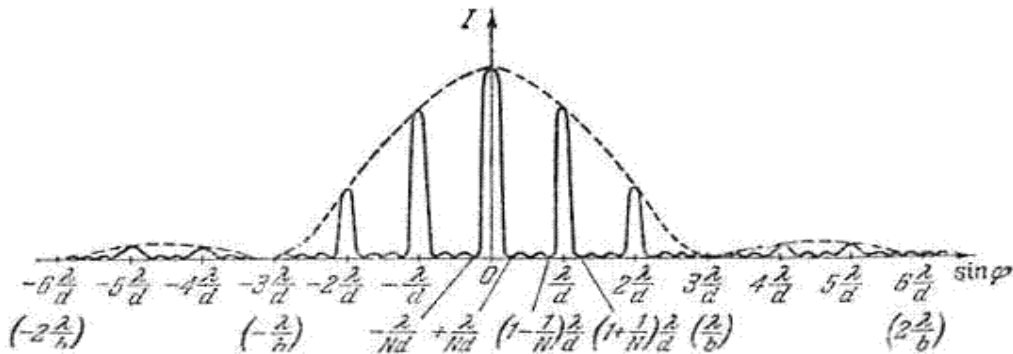
$$\delta\varphi = \frac{2\lambda}{d N \cos(\varphi_m^{max})}. \quad (29)$$

Угловая ширина максимумов

Благодаря большому числу штрихов (щелей) N линии оказываются очень узкими.

Теперь пора вспомнить об интенсивности излучения $I^{(1)}(\varphi)$ от одной щели, входящей в формулу (25). Мы рассуждали о главных максимумах с очень большой интенсивностью, но ведь может оказаться, что под углом, соответствующем какому-нибудь из них, ни одна щель вообще не излучает! Одним словом,

функция $I^{(1)}(\varphi)$ модулирует только что рассмотренную картину от N щелей, и все в целом выглядит так, как это показано на рисунке. Пунктиром обозначена интенсивность от одной щели.



Основная задача использования спектральных приборов – различить близкие по длине волны линии ($\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$) спектра излучения. Для этого, прежде всего, нужно, чтобы главные максимумы таких линий были достаточно разнесены по углу, поэтому вводится такая спектральная характеристика прибора как *угловая дисперсия* – отношение разности углов $\delta\varphi$, под которыми видны две линии к разности длин волн излучения $\delta\lambda$:

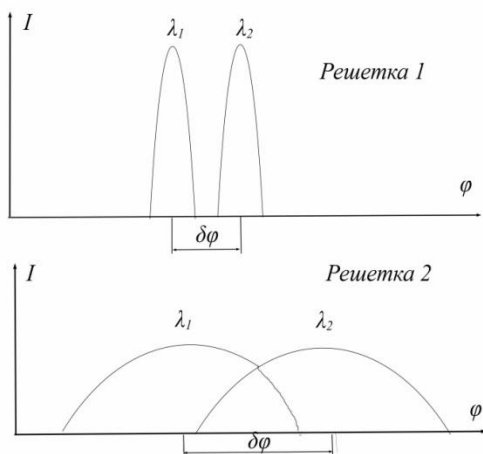
$$D_\varphi = \delta\varphi / \delta\lambda. \quad (30)$$

Для решетки эта характеристика находится очень просто – взятием дифференциала от левой и правой частей равенства (26) (будем писать просто φ вместо φ_m^{max}):

$$d \cos(\varphi) \delta\varphi = m \delta\lambda,$$

так что

$$D_\varphi = \frac{m}{d \cos(\varphi)}. \quad (31)$$



угловая дисперсия второй решетки, очевидно больше, но совершенно ясно,

Угловая дисперсия.
Определение

Угловая дисперсия решетки

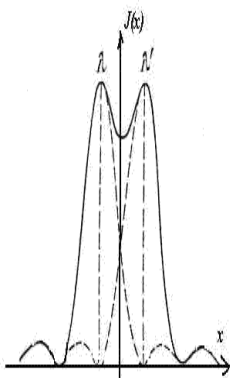
Однако одной дисперсии не достаточно для описания спектральных свойств дифракционной решетки. Посмотрим на два рисунка,¹ на которых показаны интенсивности для одних и тех же длин волн на двух решетках. Угловая дисперсия

¹ Это мои рисунки, поэтому форма линий определяется не действительностью, а моими убогими возможностями рисования.

что первая решетка лучше: возьмите мысленно сумму интенсивностей на второй решетке и вы поймете, что там видна будет только одна линия, а не две. Говорят, что на первом рисунке две линии *разрешены*, а на втором – нет. Однако часто бывает так, что для одного человека какие-то линии видны как отдельные, а для другого – нет. Там, где на ночном небе я увижу только одну звезду, человек с хорошим зрением различит три, а с уникальным зрением (у меня был студент, который мелко исписанную шпиргалку клал на пол и *все видел*) – и все пять. Поэтому для прибора нужно как-то договориться, какие линии считать разрешенными, нужен объективный критерий.

Наиболее употребителен *критерий Рэля*: две линии находятся на пределе разрешения,¹ если максимум одной из них приходится на границу другой.

Критерий Рэля



Это совмещение максимума одной линии с минимумом другой показано на рисунке вертикальными штриховыми линиями.

Разрешающей способностью решетки называется величина

$$R = \lambda / \delta\lambda_{min}, \quad (32)$$

где $\delta\lambda_{min}$ – минимальная разность двух длин волн, линии которых оказываются разрешенными этой решеткой.

Разрешающая способность. Определение

Найдем выражение для разрешающей способности решетки при использовании критерия Рэля. Пусть, например, максимум линии для волны $\lambda' = \lambda + \delta\lambda_{min}$ совпадает с минимумом линии λ под углом φ . Тогда, с одной стороны,

$$d \sin(\varphi) = m(\lambda + \delta\lambda_{min}),$$

а с другой (см. рис. и (28)) –

$$d \sin(\varphi) = (m + 1/N)\lambda,$$

так что

$$m\delta\lambda_{min} = \lambda/N,$$

откуда (см. (32))

$$R = mN. \quad (33)$$

Разрешающая способность решетки

¹ Т.е. если расстояние между ними меньше, чем указано далее, то считается, что они сливаются в одну линию.

Посмотрите на [рисунок](#) и покажите, что длина ($L = d \cdot N$) первой решетки существенно больше длины второй.

Двумерные и трехмерные решетки. Дифракция рентгеновских лучей

Возьмем решетку, на которую нанесены взаимно перпендикулярные штрихи, скажем, горизонтальные и вертикальные.¹ Такая решетка называется двумерной. Пусть период горизонтальных штрихов равен d_1 , вертикальных – d_2 , а углы дифракции обозначим соответственно φ_1 и φ_2 (это углы во взаимно перпендикулярных плоскостях).

Если от обычной (одномерной) решетки на экране образуется система полос, то картина от двухмерной решетки представляет собой светлые пятна на пересечении таких полос от двух решеток. В самом деле, надо удовлетворить сразу двум условиям главных максимумов:

$$d_1 \sin(\varphi_1) = m_1 \lambda$$

$$d_2 \sin(\varphi_2) = m_2 \lambda.$$

Теперь расположим такие двумерные решетки друг за другом на равных расстояниях перпендикулярно третьей оси. Получится *трехмерная* решетка. Ясно, что добавится какое-то еще условие, так что дифракционные максимумы станут уже чем-то особенным, так сказать, редкостью.

Трехмерные решетки редко используются в искусственных ситуациях, но зато природа подарила нам уже готовые строго периодические структуры – кристаллы. Правда, периоды таких трехмерных решеток порядка нескольких ангстрем², а [мы знаем](#), что дифракция наблюдается, когда период больше длины волны. Поэтому дифракцию наблюдают для рентгеновского излучения, длина волны которого меньше межатомного расстояния в кристаллах.

Рентгеновские лучи отражаются от систем параллельных атомных плоскостей³ кристалла, причем конструктивная интер-

¹ Или сложим вместе две решетки, повернув одну из них на 90 градусов.

² Ангстрем введен как характерный размер легких атомов и равен 10^{-10} м.

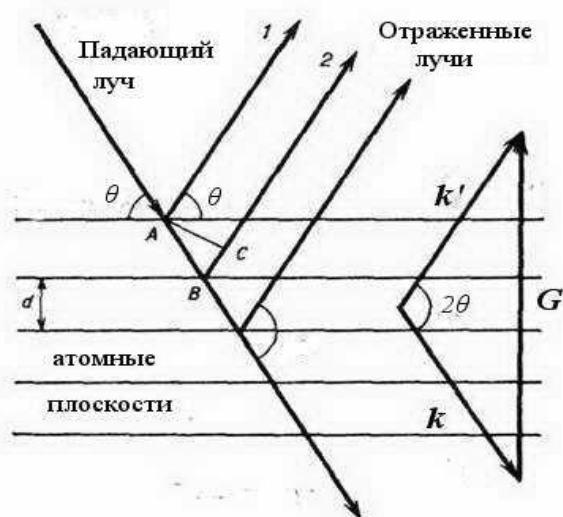
³ Атомная плоскость – плоскость проведенная через центры периодически расположенных атомов.

ференция отраженных лучей имеет место только в том случае, когда их фазы одинаковы, от какой бы плоскости этой системы они не отразились.

У.Л. Брэгг и независимо от него русский ученый Г. Вульф получили из этих соображений простую формулу, дающую условие, при выполнении которого наблюдается дифракционное отражение. Это отражение называют дифракцией Брэггов, а формула Вульфа – Брэгга¹ выглядит так:

$$2d\sin(\vartheta) = m\lambda, \quad (34)$$

Формула Вульфа
- Брэгга



где ϑ – угол скольжения (дополнительный к углу падения, см. рисунок), d – расстояние между атомными плоскостями, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, λ – конечно, длина волны. Левая часть формулы Вульфа – Брэгга имеет очень простой смысл: это оптическая разность

хода лучей, отраженных от соседних атомных плоскостей.² Ну, а правая часть (34) обеспечивает одинаковую фазу в отраженных лучах.

Вставка в правой части рисунка для тех, кто знает, что такое вектор обратной решетки \mathbf{G} . Видно, что волновые вектора падающего \mathbf{k} и отраженного \mathbf{k}' лучей связаны соотношением

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}.$$

Подытожим сказанной очень важной для следующего семестра фразой.

Волна не чувствует строго периодической трехмерной структуры, если только не выполняется условие Вульфа – Брэгга для какой-либо системы атомных плоскостей.

¹ Эту формулу часто не совсем верно называют формулой Вульфа – Брэггов (я сам был грешен). Получил ее Уильям Лоренс Брэгг, награжденный вместе со своим отцом, Уильямом Генри Брэггом, Нобелевской премией «за заслуги в исследовании кристаллов с помощью рентгеновских лучей». Их работы послужили основой для рентгеноструктурного анализа.

² Посмотрите вывод формулы для оптической разности хода лучей в тонких пленках. Здесь, конечно, показатель преломления $n = 1$, а угол преломления равен углу падения.

Чуть-чуть о голографии

Мы только что познакомились с дифракцией, а в предыдущих лекциях речь шла об интерференции. Совместное использование этих оптических явлений позволяет осуществить объемную запись изображения, названную голографией (сама пластинка с записью, как вы, конечно, знаете, называется голограммой).

Для получения голограммы необходимо когерентное излучение, поэтому, не смотря на то, что впервые голографическая запись была осуществлена Д. Габором еще в 1947 году, широкое распространение голография получила только после изобретения лазера.

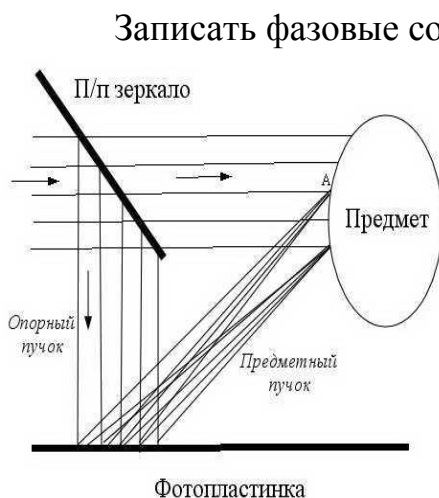
Обычная фотография «записывает» только интенсивность лучей и воспринимается обоими глазами одинаково, а мы знаем, что ощущение объема предмета возникает из-за того, что глаза его видят с различных направлений. Простейший способ получить объемное изображение – иметь два изображения, предназначенных для каждого глаза в отдельности. Эти изображения надо разглядывать через специальные очки, не допускающие в глаз «чужую» картинку. Голография идет по другому пути.

Сначала несколько слов о том, как уникальная компьютерная система «мозг» с помощью периферийного устройства «глаз» различает предметы. Когда некоторый объект освещен, его поверхность рассеивает свет,¹ и каждая точка его посылает световые лучи по всем направлениям. В глаз от каждой такой точки приходят *расходящиеся* лучи, мозг вычисляет ее положение, и мы ее *видим*. Информация обо всех точках обрабатывается одновременно, создавая целостную картину о предмете. Изображение, полученное с помощью второго глаза, оказывается несколько смещенным, что и приводит в результате дополнительной работы мозга к единому объемному изображению объекта.

¹ Именно рассеивает, а не отражает. Чистая отражающая поверхность может быть невидимой, как, например, поверхность зеркала – ее точки посылают лучи в строго определенных направлениях, что для глаза и мозга не понятно.

Системе «мозг – глаз» неважно, есть ли этот предмет в действительности, нужно только, чтобы *все лучи приходили с правильных направлений*. Голограмма как раз и имитирует лучи, рассеянные предметом.

Ясно, что для получения такой имитации нужно записать не только яркость лучей (интенсивность), но и углы, под которыми шли лучи от предмета, а эта информация содержится в *фазе* колебаний проходящих в глаз лучей.¹ Голограмма и содержит информацию как об амплитуде светового поля, так и о распределении фазы колебаний в плоскости голограммы.



Интерференция опорных и предметных лучей, рассеянных объектом. Я приведу чрезвычайно упрощенную картинку записи голограммы, отражающую только самую суть процесса. Первичный световая волна с высокой степенью когерентности² делится на два пучка – опорный, поступающий непосредственно на фото-

Запись - *интерференция* опорного и предметного пучков света

графическую пластинку, и предметный, который освещает объект. На фотографической пластинке свет, рассеянный предметом, интерферирует с опорными лучами, формируя сложную интерференционную картину, которая и записывается.

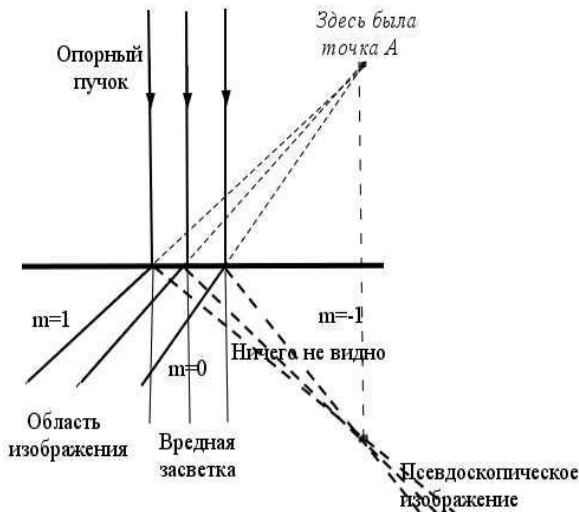
Поскольку запись информации обо всем предмете сводится к сумме записей об одной точке, ее-то мы как раз и рассмотрим. Пусть это будет точка А на рисунках. В окрестности любой точки *x* интерференционная картина представляет собой локальную дифракционную решеточку, которая и записывается при экспозиции (и, конечно, проявлении) фотопластинки. Решетка эта не совсем такая, как мы рассматривали в предыдущем параграфе (с резкими переходами щель – пре-

¹ Глазу не нужна информация о фазе, мозг обрабатывает углы, под которыми приходят лучи.

² Большая длина когерентности необходима, чтобы фаза опорного луча оставалась неизменной на все время экспозиции. Радиус пространственной когерентности должен охватывать весь размер фотопластинки.

пятствие), уровень затемнения меняется плавно,¹ но все равно есть чередование максимумов и минимумов. Однако при дифракции на такой решетке максимумы высоких порядков отсутствуют, остаются только главные максимумы порядков $m = 0, \pm 1$.

Если теперь осветить проявленную пластинку-голограмму параллельным пучком света, который ранее мы



называли опорным, то лучи будут дифрагировать на всех локальных решеточках. И здесь нам очень повезло. Направление дифрагировавших лучей вблизи любой точки x , соответствующих главному максимуму порядка $m = 1$, совпадает с направлением, которое имел луч, идущий из вы-

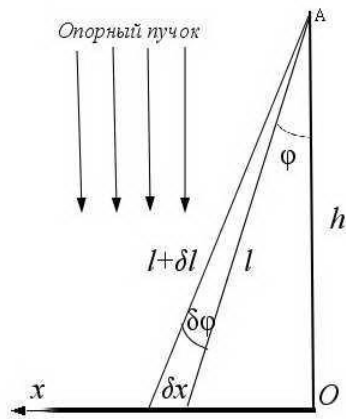
Восстановление изображения – дифракция опорного пучка на голограмме.

бранной точки предмета через эту точку x . Поэтому, если расположить глаз где-нибудь в области изображения (см. рис.), то он увидит расходящиеся лучи как бы от точки A . И так со всеми точками предмета.

Максимум дифракции нулевого порядка – вредная засветка, ее убирают различными способами. Лучи, соответствующие порядку дифракции $m = -1$, тоже обычно представляют собой помеху, однако на секундочку задержимся на них. Если расположить глаз в области, где эти лучи – сходящиеся (ближе к пластине, чем точка их пересечения – изображение точки A), то ничего видно не будет, так, какие-то отблески, потому что для мозга сходящиеся лучи – бессмыслица. Одна за точкой пересечения пучок лучей становится расходящимся, и изображение будет, но, поскольку все лучи поменялись местами, оно будет вывернутым. Такое изображение называется псевдоскопическим.

¹ В идеальном случае интенсивность (а стало быть, затемнение после проявления) на фотопластинке изменяется по закону $I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)$, где d период решетки (расстояние между максимумами).

Нам остается убедиться, что сказанное об угле дифрак-



ции верно. Для этого вычислим период локальной решетки для какой-нибудь точки x (мы по-прежнему учитываем только лучи, идущие от одной точки A). Пусть луч, идущий из этой точки, составляет угол φ с вертикалью.

Период локальной решетки d – расстояние между соседними максимумами¹ – соответствует оптической

разности хода двух близких лучей, равной длине волны λ .

Оптический путь (см. рис.)

$l = h/\cos(\varphi)$, а малая оптическая разность хода δl приближенно может быть вычислена как дифференциал

$$\delta l = \delta \left(\frac{h}{\cos(\varphi)} \right) = \frac{h \cdot \sin(\varphi) \delta \varphi}{\cos^2(\varphi)}.$$

и если приращение угла $\delta \varphi$ соответствует двум соседним максимумам, то должно выполняться равенство

$$\frac{h \cdot \sin(\varphi) \delta \varphi}{\cos^2(\varphi)} = \lambda. \quad (35)$$

С другой стороны, приращению угла $\delta \varphi$ на оси Ox соответствует расстояние

$$\delta x = \delta (h \cdot \operatorname{tg}(\varphi)) = \frac{h \delta \varphi}{\cos^2(\varphi)}. \quad (36)$$

Если это расстояние – период ($\delta x = d$), то сравнивая равенства (35) и (36), для периода локальной решетки получаем

$$d \sin(\varphi) = \lambda,$$

что как раз соответствует [УСЛОВИЮ](#) главного максимума первого порядка.

¹ Или минимумами, или как хотите.