Бозоны. Лазеры

Свойства бозонов

Напомню, что распределение Бóзе – Эйнштейна для частиц с целым (в том числе нулевым) спином имеет вид

Распределение Бóзе – Эйнштейна

$f(\varepsilon) = 1/(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1),$ (1)

где ε – энергия частицы (имея в виду кинетическую энергию, будем считать, что $\varepsilon \geq 0$), μ – химический потенциал, зависящий от температуры. Если полное число частиц N сохраняется, то химический потенциал находится из условия

$\sum_i f(\varepsilon_i) = N,$

в противном случае $\mu = 0$.

Для фермионов мы получили принцип запрета Паули только исходя из того факта, что они описываются антисимметричными ψ-функциями. В отличие от «индивидуалистов» фермионов, бозоны ярые «коллективисты». Тоже исходя только из симметричности их волновых функций, можно показать, что вероятность перехода бозона в некоторое состояние, в котором уже есть N *таких же* бозонов пропорциональна $N+1$ (единичка показывает, что переход возможен и при отсутствии других бозонов). Именно этими *квантовыми* свойствами бозонов и определяется вид функции распределения (1).

Сначала поговорим о случае, когда число частиц сохраняется. Тогда величина $\mu < 0$, так как в противном случае для энергий $\varepsilon < \mu$ получилось бы $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} < 1$, и среднее число частиц в таких состояниях $f(\varepsilon) < 0$, чего, понятно, быть не может.

Конденсация Бозе – Эйнштейна

А что, если химический потенциал обратится в ноль? Тогда возникает особое значение энергии $\varepsilon = 0$, при котором функция $f(0) = \infty$. Такая возможность появляется только при $T \to 0$[1], причем в этом пределе $f(\varepsilon) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$, т.е. все бозоны переходят в состояние с минимальной энергией $\varepsilon = 0$. В том, что при этом функция распределения обращается в бесконечность, нет ничего страшного: в физике вообще считается, что число частиц

[1] При этом приходится раскрывать неопределенность, что оказывается довольно тонкой задачей с точки зрения физики.

бесконечно велико в физическом смысле в любой статистической системе (во многих случаях осуществляется предельный переход $N \to \infty$). Интересно другое. Оказывается, что такое состояние обладает весьма своеобразными свойствами, и переход в него при очень низких температурах получил название «*конденсация Бозе – Эйнштейна*».

В таком состоянии импульсы всех бозонов с равны нулю, а стало быть, пространственно частицы размазаны в очень большом объеме. Их состояния абсолютно одинаковы (говорят, они находятся в *когерентных* состояниях) и, строго говоря, описываются единой когерентной волновой функцией.

Если в чистом виде конденсацию Бозе – Эйнштейна смогли получить при температурах $\sim 10^{-7} K$ только в 1995г., то связанные с ней явления сверхтекучести и сверхпроводимости наблюдались и были изучены теоретически гораздо раньше.[1]

Переход к классическому распределению Больцмана

При повышении температуры химический потенциал уменьшается, и может наступить момент, когда отношение $\frac{\varepsilon-\mu}{kT}$ становится заметно больше единицы, т.е. $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} \gg 1$. Тогда единицей в знаменателе распределения (1) можно пренебречь, и

$$f(\varepsilon) \approx e^{\frac{\mu}{kT}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \ll 1,$$

т.е. квантовые свойства системы становятся несущественными (нет состояний с большим числом бозонов) и распределение переходит в классическое распределение Больцмана.

Фотоны как бозоны

Фотоны – бозоны, полное число которых не сохраняется (так что μ=0), они могут рождаться (например, испускаться атомами при переходе электронов в более низкое энергетическое состояние) и уничтожаться (поглощаться). Понятно, что вероятность поглощения фотонов пропорционально их числу. Но их бозонная сущность приводит к тому, что наличие фотонов в некотором состоянии приводит к увеличению вероятности рождения новых фотонов (если, конечно, в атомах есть электроны, ко-

[1] Сверхпроводимость, в сущности, это сверхтекучесть так называемых «куперовских пар» электронов. Сами электроны – фермионы и не могут участвовать в конденсации Б.-Э., но при низких температурах они образуют упомянутые пары с суммарным спином, равным нулю.

торые могут испустить такой квант света) *в точности таком же состоянии*.

Испускание фотонов, вероятность которого пропорциональна уже имеющемуся числу одинаковых фотонов, называется *вынужденным*. Так рожденные фотоны одинаково поляризованы, летят в одном и том же направлении (так что пространственно когерентны), и когерентны во времени.

Вынужденное испускание фотонов

Испускание фотона возможно и без наличия других фотонов, такое испускание называется *спонтанным*

Спонтанное испускание

Рассмотрим систему одинаковых атомов (или молекул), у которых есть пара уровней (не обязательно электронных) с энергиями E_1 и E_2, такими, что $E_2 - E_1 = \hbar\omega$.

Атом может поглотить фотон частоты ω и перейти с уровня E_1 на уровень E_2, спонтанно испустить фотон ($E_2 \to E_1$) и, наконец, совершить вынужденное испускание.

Поглощение

Пусть $u(\omega)$ – спектральная плотность энергии излучения на частоте ω (не обязательно равновесного). Ясно, что эта величина пропорциональна числу фотонов. Обозначим n_1 и n_2 концентрации атомов с энергиями E_1 и E_2 соответственно. Тогда число переходов «вверх» $w\uparrow$ (поглощение) и «вниз» $w\downarrow$ (испускание) в единицу времени в единице объема можно записать так:

$w\uparrow = B_{12}u(\omega)n_1$ (поглощение), (2)

$w\downarrow = An_2 + B_{21}u(\omega)n_2$

(спонтанное + вынужденное испускание).

Коэффициенты Эйнштейна.

Эти соотношения впервые были написаны Эйнштейном, и коэффициенты пропорциональности A и B носят его имя.

Допустим, что речь идет о состоянии равновесия. Тогда функция $u(\omega)$ есть не что иное, как функция Планка

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}. \quad (3)$$

В силу принципа детального равновесия должно быть $w\uparrow = w\downarrow$, т.е.

$$B_{12}u(\omega, T)n_1 = An_2 + B_{21}u(\omega, T)n_2. \quad (4)$$

Сначала перейдем к пределу $T \to \infty$. В этом пределе $u(\omega, T) \to \infty$, так что членом An_2 можно пренебречь, кроме того, $\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \to 1$. Таким образом,

$$B_{12} = B_{21} = B. \quad (5)$$

Теперь вернемся к соотношению (4), разделим обе его части на n_2 и перенесем члены, содержащие $u(\omega, T)$ влево:

$$Bu(\omega, T)\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right) = A.$$

Подставляя функцию Планка (3), получаем

$$A = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B. \qquad (6)$$

Соотношение между коэффициентами Эйнштейна A и B

Задание. Перепишите соотношения (2) с учетом равенств (5) и (6).

Посмотрим теперь, как распространяется в веществе *неравновесное* излучение, например, заранее приготовленный поток фотонов частоты ω, летящих параллельно оси x, если в этом веществе есть атомы с энергетическими уровнями E_1 и E_2, такими, что $E_2 - E_1 = \hbar\omega$. Пусть, как и раньше, n_1 и n_2 – концентрации атомов соответственно с энергиями E_1 и E_2

Прохождение потока фотонов через вещество при наличии резонансных уровней $E_2 - E_1 = \hbar\omega$

Обозначим $u(\omega, x)$ плотность энергии в этом потоке, так что $u(\omega, x) = \hbar\omega n_{ph}(x)$, где n_{ph} – объемная плотность фотонов с энергией $\hbar\omega$ на плоскости $x = const$. Тогда плотность потока энергии запишется как $cu(\omega, x)$, где, конечно, c – скорость света. Будем считать, что световой поток достаточно интенсивен, чтобы можно было пренебречь спонтанным излучением.[1]

Выделим объем Sdx вещества, ограничив его цилиндром с осью, параллельной оси x, основаниями которого служат две плоские поверхности площадью S, перпендикулярные оси x, на бесконечно малом в физическом смысле[2] расстоянии dx друг от друга (нарисуйте рисунок сами).

Из-за поглощения и испускания фотонов поток энергии через выходную поверхность будет отличаться от потока через входную поверхность выделенного объема:

$$c\big(u(\omega, x + dx) - u(\omega, x)\big)S = \hbar\omega Bu(\omega, x)(n_2 - n_1)\, Sdx. \qquad (7)$$

Здесь $\hbar\omega Bu(\omega, x)n_2$ – энергия, приходящая в пучок света за счет вынужденного испускания, а $\hbar\omega Bu(\omega, x)n_1$ – энергия, отбираемая из потока фотонов за счет поглощения (все это в еди-

[1] Впрочем, спонтанное излучение распространяется во все стороны, оно не когерентно и мало что изменяет в дальнейших рассуждениях.

[2] В данном случае величина dx должна быть достаточно мала, чтобы можно было ее считать бесконечно малой в математическом смысле, и достаточно велика, чтобы в объеме Sdx было много атомов.

ницу времени в единице объема). В левой части соотношения (7) используем равенство $u(\omega, x + dx) = u(\omega, x) + \frac{du(\omega,x)}{dx}dx$.
В результате получаем следующее уравнение

$$\frac{du(\omega,x)}{dx} = -\alpha u(\omega, x), \qquad (8)$$

где $\alpha = \hbar\omega B(n_1 - n_2)/c$.

Это уравнение так просто, вообще говоря, решить нельзя, потому что концентрации n_1 и n_2 меняются со временем по мере прохождения светового потока. Однако мы пренебрежем этим изменением, и тогда

$$u(\omega, x) = u(\omega, 0)e^{-\alpha x}.$$

Закон Бугера – Ламберта - Бера
α- коэффициент поглощения

Эта формула описывает изменение плотности энергии (или интенсивности) светового потока в среде с резонансным поглощением на частоте ω. В обычной ситуации $n_1 > n_2$ (в частности, при равновесии

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}), \qquad (9)$$

так что *коэффициент поглощения* $\alpha > 0$, и интенсивность света уменьшается, поскольку поглощение оказывается больше испускания.

Для того, чтобы усилить световой поток, нужно сделать коэффициент поглощения отрицательным, иначе говоря, сделать так, чтобы концентрация атомов на верхнем уровне n_2 была больше концентрации на нижнем уровне n_1. Ситуация, когда $n_2 > n_1$, называется *инверсией населенностей*, а среда с инверсией – *активной средой*.[1] Как этого достичь?

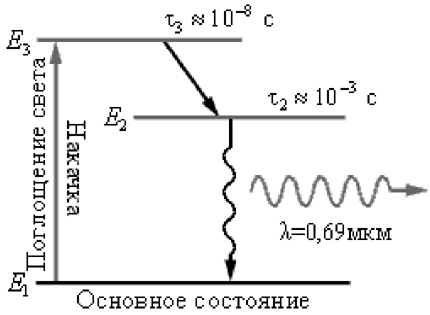
Используя только два уровня энергии достичь инверсии нельзя ни при какой интенсивности излучения. Рассмотрим, однако, такой пример. Соорудим замкнутое пространство из двух одинаковых сосудов (один на полу, а другой под потолком), соединенных двумя одинаковыми шлангами, в один из которых вставлен насос. В нижний сосуд нальем воду и включим насос. Какой бы ни была мощность насоса, в верхнем сосуде не будет больше воды, чем в нижнем, поскольку такое же количество воды, какое закачивается насосом по одному шлангу (поглощение), сливается по другому (вынужденное излучение). В верхнем со-

[1] Среда с инверсией – сильно неравновесное состояние, и понятие температуры к ней не применимо. Однако, если посмотреть формально на выражение (9), то можно условно сказать, что инверсии соответствует «отрицательная температура». Впрочем, лучше так не говорить.

суде воды будет даже несколько меньше из-за силы тяжести (спонтанные переходы). Как быть? Надо в верхнем сосуде сделать дырочку и под ней поставить еще один сосуд, в котором будет накапливаться вода. Ясно, что через некоторое время в дополнительном сосуде скопится воды больше, чем в нижнем резервуаре (инверсия между нижним и промежуточным уровнями).

Трехуровневая схема получения инверсии населенностей

Эта идея и реализуется в простейшей, трехуровневой, схеме лазерного усилителя светового потока, показанной на рисунке. Представленные параметры характерны для классического лазера на рубине,[1] с той лишь разницей, что верхний уровень E_3 в рубине представляет собой две широкие энергетические зоны. Это важно потому, что для перевода электронов с основного уровня на верхний (этот процесс называется *накачкой*) можно использовать лампы с довольно широким спектром.[2]



С этого верхнего уровня (среднее время жизни на нем $\sim 10^{-8}$с) электроны безызлучательно переходят (это «дырочка» в верхнем сосуде нашего примера) на *метастабильный* уровень E_2, где могут жить гораздо дольше ($\sim 10^{-3}$с), а потому там и накапливаются. *Рабочие уровни* – уровни E_1 и E_2, именно на них образуется инверсия населенностей. Если после накачки через кристалл пропустить свет с длиной волны, соответствующей переходу между этими уровнями энергии, то его интенсивность будет усиливаться за счет преобладания вынужденного испускания над поглощением.

Но это пока когерентный усилитель света; чтобы получился лазер, его надо преобразовать в генератор. Эта задача всегда решается одинаково, включением положительной обратной связи, но способы реализации такой обратной связи весьма разнообразны. В радиотехнике выходной сигнал вновь подается на вход в первоначальной фазе, в СВЧ технике используются резо-

[1] Рубин представляет собой кристалл корунда Al_2O_3 с ионами хрома Cr^{+++}, придающими ему темно-красный цвет. Уровни энергии электронов примесных ионов, показанные на рисунке, находятся в запрещенной зоне корунда. Лазер на рубине – исторически первый работающий лазер.
[2] Первоначально использовалась импульсная газоразрядная лампа с длительностью импульса $\approx$ 1мс и мощностью 2-3 кВт.

наторы, по аналогии с ними устройства, обеспечивавшие положительную обратную связь в лазерах, называются *открытыми резонаторами*. В простейшем случае они представляют собой два плоских параллельных зеркала, между которыми помещается кристаллический стержень с осью, перпендикулярной к поверхности зеркал. Одно из зеркал должно быть полупрозрачным для вывода излучения наружу. В общем случае устройство оптического резонатора (как и его теория) может быть гораздо более сложным. Резонаторы не только обеспечивают возможность генерации света в лазере, но и могут улучшать его пространственную (сохраняя только лучи, параллельные оси) и временную (вырезая из широкой атомной линии более узкую спектральную часть) когерентность.

Оптические резонаторы

Процесс генерации начинается со спонтанного рождения «удачных» фотонов, летящих вдоль оси резонатора. Отражаясь от зеркал и вновь проходя через активную среду, они вызывают вынужденное излучение, также многократно отражающееся от зеркал. Это лавинный процесс. Рост плотности энергии излучения приводит к росту числа вынужденных переходов, а рост числа вынужденных переходов – к росту плотности излучения. Этот процесс продолжается до тех пор, пока неизбежные потери не превысят скорость генерации новых фотонов (ведь инверсия по мере развития лавины истощается).[1]

Процесс лавинной генерации когерентного излучения в лазере

Мы затронули только некоторые общие принципы, определяющие работу лазеров. В настоящее время существует огромное число лазеров, отличающихся длиной волны генерации, мощностью, длительностью импульсов (есть лазеры и непрерывной генерации). Это разнообразие базируется на использовании различных активных сред (не только кристаллических), способов накачки, специальных резонаторов и т.д. Однако все эти вопросы далеко выходят за рамки курса общей физики.

[1] Условие начала генерации определяется примерно теми же факторами.