

# Энергетические зоны в твердых телах

## Зоны при образовании кристалла

До сих пор мы рассматривали энергетические уровни (напомню, что это почти жаргонное название<sup>1</sup> для энергии стационарных состояний) в изолированной потенциальной яме (задачи о бесконечно глубокой яме, о квантовом осцилляторе, об атоме водорода). А что будет происходить, если начать сближать две одинаковые ямы (например, два одинаковых атома)? Выберем какой-либо уровень энергии  $E$  в одной изолированной яме. Если вторая яма находится на очень большом расстоянии ( $r \rightarrow \infty$ ), то в ней есть в точности такой же уровень энергии. При сближении двух потенциальных ям образуется единая квантовая система, и расчеты показывают, что в ней образуются два уровня с энергиями  $E_1$  и  $E_2$ ,  $\Delta E = E_2 - E_1 > 0$  (для определенности). Обратим внимание, что из двух одинаковых уровней в двух изолированных ямах образуются два смещенных уровня в единой квантовой системе.<sup>2</sup>

Смещение  $\Delta E$  тем больше, чем ближе друг к другу находятся ямы и чем больше энергия  $E$  (глубокие уровни слабее чувствуют соседей).

При образовании кристалла, содержащего  $N$  одинаковых атомов (ионов) из каждого атомарного уровня образуется  $N$  смещенных уровней в пределах энергий  $\Delta E$ , а поскольку число  $N$  очень велико, образуется энергетическая зона шириной  $\Delta E$  с квазинепрерывным спектром.<sup>3</sup> Зоны, образовавшиеся от двух соседних атомных уровней, могут либо быть отделены друг от друга интервалом энергий, где нет уровней, либо перекрываться.

Приближение  
сильной связи

---

<sup>1</sup> Электроны в атоме из-за взаимодействий всегда описываются суперпозицией стационарных состояний. Однако согласно постулату об измерениях создается иллюзия, что они находятся на определенных «уровнях энергии».

<sup>2</sup> Такое смещение необходимо, чтобы в системе двух потенциальных ям могло разместиться такое же число фермионов, что и в отдельных ямах (вспомним о запрете Паули).

<sup>3</sup> Если образуется кристалл из различных атомов (ионов), то каждый тип иона образует свои зоны. Например, в кристалле  $NaCl$  образуются зоны из уровней ионов  $Na^+$  и  $Cl^-$ .

Описанная здесь картина служит основой для так называемого *приближения сильной связи* (имеется в виду связь электронов с атомами или ионами кристаллической решетки), позволяющего рассчитать энергетические зоны.

Обратимся теперь к вопросу, в каких случаях образуются металлы и диэлектрики. Сначала только отметим важное обстоятельство: *вклад в проводимость дают только частично заполненные зоны*. Понятно, что пустая зона не дает вклада в проводимость, а почему электроны полностью заполненной зоны не принимают участие в формировании тока, мы узнаем чуть позже.

Рассмотрим два конкретных примера.

Электронная конфигурация Li записывается так:  $1s^2 2s^1$ , т.е. уровень энергии  $1s$  заполнен полностью, а уровень  $2s$  занимает один электрон из двух возможных. При образовании кристалла Li из этих уровней образуются две энергетические зоны, нижняя из которых заполнена полностью, а следующая содержит  $N$  из  $2N$  возможных электронов, т.е. заполнена частично и обеспечивает проводимость, так что литий – металл. Эту энергетическую зону мы будем называть зоной проводимости металла, хотя часто ее называют валентной зоной, поскольку она происходит из валентных электронов атомов.

При сближении  $N$  атомов Li уровни энергии зоны проводимости как бы выплескиваются из потенциальных ям отдельных атомов, находящиеся на них электроны становятся (почти) свободными, и к ним применима рассмотренная ранее теория (см. [«Проводимость металлов»](#)). В частности, электронный газ оказывается сильно вырожденным, энергия Ферми, равная (при  $T = 0$ ) максимальной энергии электронов проводимости, размещается в середине зоны проводимости.<sup>1</sup> Отдавая свои электроны, сами атомы превращаются в катионы.

Образование металла

---

<sup>1</sup> Просто потому, что число электронов равно числу свободных уровней. Для других металлов можно только сказать, что уровень Ферми находится где-то внутри зоны проводимости.

Выше двух рассмотренных зон располагаются другие свободные от электронов зоны энергии, которые также относят к зонам проводимости.

Теперь посмотрим, что происходит при образовании кристалла LiF – типичного диэлектрика с ионной связью. Электронная конфигурация фтора –  $1s^2 2s^2 2p^5$ . Для заполнения его второй оболочки не хватает одного электрона, который при сближении он отбирает у атома Li. Образуются два иона:  $Li^+$  ( $1s^2$ ) и  $F^-$  ( $1s^2 2s^2 2p^6$ ). Почему такое изменение оказывается энергетически выгодным? Ведь энергия ионизации лития равна 5,4 эВ, а при образовании иона фтора выделяется всего лишь энергия 3,6 эВ (это энергия связи дополнительного электрона). Зато полная энергия системы становится меньше за счет кулоновского взаимодействия

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

и уменьшается с уменьшением расстояния между ионами. Начиная с момента, когда  $U(r)$  оказывается меньше, чем  $3,6 - 5,4 = -1,8$  эВ, полная энергия становится отрицательной,<sup>1</sup> т.е. ионы оказываются в потенциальной яме. Далее связь усиливается, пока в действие не вступают короткодействующие квантовые силы отталкивания. Все это приводит к тому, что существует оптимальное расстояние между ионами, соответствующее минимуму полной энергии, которое в случае образования кристалла определяет постоянную решетки.

В кристалле LiF энергетическая зона, образовавшаяся из уровней энергии  $2p$  фтора  $F^-$ , оказывается заполненной полностью,<sup>2</sup> а следующие зоны ( $2s Li^+$ ,  $2p Li^+$  и т.д.) – пустыми. Некому участвовать в проводимости, поэтому LiF – диэлектрик.

**Проводимость любого диэлектрика (в том числе полупроводников, см. ниже) при  $T = 0$  равна нулю.**

Последняя (самая высокая) полностью заполненная энергетическая зона называется *валентной зоной*. Следующие за ней свободные зоны называются *зонами проводимости*.<sup>3</sup>

Образование  
диэлектрика

Валентная зона,  
зона проводимости

<sup>1</sup> В том смысле, что она меньше суммы энергий атомов Li и F,

<sup>2</sup> Как, конечно, и все нижележащие зоны.

<sup>3</sup> В узком смысле, под зоной проводимости понимают низшую энергетическую зону, следующую непосредственно за валентной зоной.

В диэлектрике между верхней границей валентной зоны ( $\varepsilon_v$ , v – valence) и нижней границей зоны проводимости ( $\varepsilon_c$ , c – conduction) есть энергетический зазор, называемый *запрещенной зоной*, шириной  $\varepsilon_g = \varepsilon_c - \varepsilon_v$  (g – gap). В этой области нет уровней, принадлежащих самому кристаллу (однако могут быть уровни примесей), поэтому не может быть *собственных* электронов.

Запрещенная зона

С учетом последних определений сделаем следующий вывод. **В диэлектрике при  $T = 0$  валентная зона заполнена полностью, а зона проводимости пуста.** Стало быть, энергия Ферми лежит где-то в запрещенной зоне.<sup>1</sup>

Диэлектрик при  $T = 0$

Диэлектрики со сравнительно узкой<sup>2</sup> запрещенной зоной называются *полупроводниками*. Собственная проводимость (т.е. проводимость без участия примесей) почти всех полупроводников при комнатной температуре чрезвычайно мала.<sup>3</sup>

Полупроводники

В некоторых случаях граница валентной зоны  $\varepsilon_v$  может оказаться выше границы зоны проводимости  $\varepsilon_c$ . Тогда материал оказывается либо металлом, либо, если перекрытие невелико, а переход из зоны в зону затруднен, – полуметаллом. Принципиальное отличие полуметаллов от полупроводников – наличие проводимости при  $T = 0$ .

Металл из-за перекрытия зон

Приближение сильной связи, как уже говорилось, позволяет рассчитать энергетические зоны, но не позволяет изучить динамику электронов. Для этой цели нам придется зайти с совсем другой стороны и считать электроны *почти свободными*, т.е. учесть в первом приближении влияние кристаллической решетки на газ свободных электронов.

---

<sup>1</sup> К вопросу о значении энергии Ферми мы еще вернемся.

<sup>2</sup> Большинство авторов относят к полупроводникам диэлектрики с шириной запрещенной зоны  $\varepsilon_g < 2$  (или 3) эВ, однако, эта граница весьма условна, и порой полупроводниками называют материалы с гораздо большим значением  $\varepsilon_g$ .

<sup>3</sup> За исключением полупроводников с очень узкой запрещенной зоной (таких как InSb с  $\varepsilon_g = 0,17$  эВ).

## Приближение почти свободных электронов

При повышении температуры от абсолютного нуля часть электронов в диэлектрике переходят из валентной зоны в зону проводимости.<sup>1</sup> Поскольку, как мы увидим, концентрация электронов в зоне проводимости при этом очень-очень мала, то мала и возникающая проводимость, а сам электронный газ можно считать невырожденным (классическим). Прежде чем обратиться к его свойствам, проследим за поведением одного электрона (одноэлектронное приближение) в кристаллической решетке при наличии электрического поля  $\mathbf{E}$ . Забудем пока о рассеянии.

Допустим, что электрон ускоряется от нулевой скорости по закону  $\mathbf{p} = -e\mathbf{E}t$  в простой кубической решетке перпендикулярно основной системе атомных плоскостей, такой, что расстояние между атомными плоскостями равно постоянной решетки  $a$ . Пусть  $k$  есть проекция волнового вектора на направление движения электрона, причем, чтобы не возиться со знаком минус, выберем положительное направление  $\mathbf{k}$  противоположно направлению поля  $\mathbf{E}$ . Тогда

$$k(t) = p(t)/\hbar = (e/\hbar)Et. \quad (1) \text{ Свободный электрон}$$

Учитывая, что в описанных условиях угол скольжения по отношению к выбранным плоскостям равен  $\pi/2$ , запишем условие Вульфа – Брэгга ( $2a = m\lambda$ ), выразив длину волны через проекцию волнового вектора  $k = \pm 2\pi/\lambda$ :

$$k = \frac{m\pi}{a}, \quad m = \pm 1, \pm 2... \quad (2)$$

Минимальное положительное значение  $k$ , при котором произойдет отражение от кристаллической решетки, таким образом, равно  $\pi/a$ .

Если бы электрон был вне решетки, то ускорялся бы бесконечно, «взбираясь» по параболе

$$\varepsilon(p) = p^2/2m, \quad \varepsilon(t) = \hbar^2 k^2(t)/2 \quad (3)$$

и проходя через все значения энергии. Зависимость энергии от импульса (или частоты  $\omega$  от волнового вектора) называют

---

<sup>1</sup> Электроны могут появиться в зоне проводимости также при межзонных переходах с поглощением фотонов (см. ниже «[Оптические переходы](#)»).

законом дисперсии, который, как мы знаем, определяет групповую скорость.

В кристалле дело обстоит по-другому. Посмотрим на рисунок.

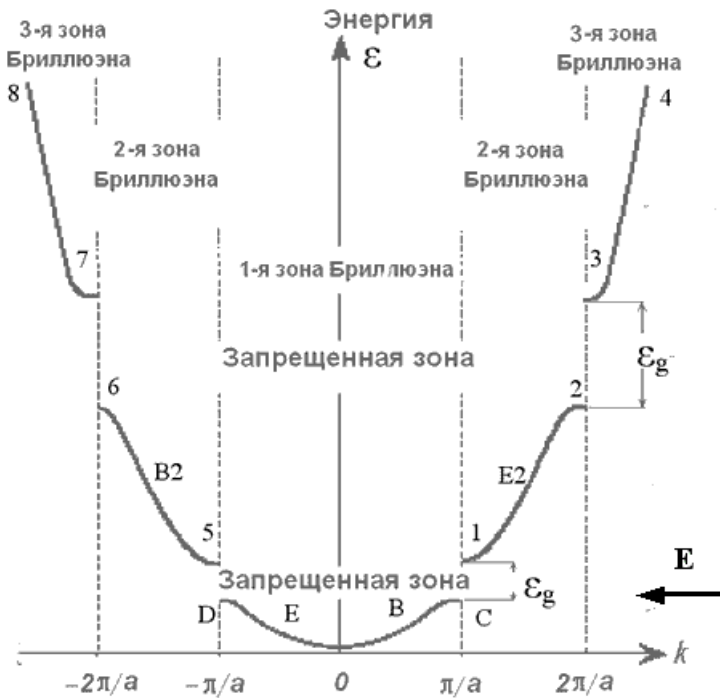


Рис.1  
Расширенная  
схема энергетических зон

Здесь нарисовано много пока непонятного, но угадывается и парабола, о которой шла речь. Электрон может ускоряться от 0 только до значения  $p = \hbar\pi/a$  (точка C), после чего произойдет отражение Вульфа – Брэгга, и его импульс станет равен  $-\hbar\pi/a$  (на нашем рисунке он переходит в точку D). Электрон теперь движется в обратном направлении и, стало быть, тормозится электрическим полем. Наконец, он останавливается в точке 0, и все повторяется сначала. Средний импульс за такой цикл равен нулю, и никакого дрейфа, никакого вклада в проводимость. Именно так все происходит со всеми электронами в полностью заполненной зоне.

Почему полностью заполненная зона не дает вклада в проводимость

Так, да не совсем так, а чуть-чуть сложнее. В природе ничто не происходит мгновенно, «в одной точке». Так и в нашей ситуации, как показывают расчеты, электрон начинает тормозиться еще до отражения и сходится с параболы где-то в области точки перегиба В, а его энергия при  $p = \hbar\pi/a$  расщепляется на два значения (обозначенные на рисунке С и «1»). В момент отражения его скорость в точках С и D равна нулю. Но если зависимость  $\epsilon(p)$  не параболическая, то нель-

зя писать так, как в формулах (3). А если очень хочется?<sup>1</sup> Тогда что-то надо делать с массой – коэффициентом параболы, считать, что вблизи перечисленных в [примечании](#) точек она различная, в том числе и отрицательная, если парабола перевернута. Оказывается, что все это не так страшно, как кажется,<sup>2</sup> но все-таки сразу такую массу электрона в кристалле назовем *эффективной* и обозначим ее  $m^*$ .<sup>3</sup>

Эффективная  
масса электрона

Что означает отрицательная масса? Если написать 2-ой закон Ньютона  $F = ma$ , то получается, что ускорение направлено *против* приложенной силы. Почему получается такая ерунда? Потому что мы хотим сосредоточиться на электроне и забыть про решетку, а именно она обеспечивает замедление электрона на участке В – С отрицательной эффективной массы (см. [рис.1](#)).

При непараболическом законе дисперсии нельзя писать

$$v = p/m,$$

Можно не читать  
(4)

но если ввести групповую скорость, то получится

$$v = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}, \text{ т. е. } v_x = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x} \text{ и т. д.}$$

(5)

Эта формула вообще имеет весьма общий характер, в частности, для параболического закона [дисперсии](#) (3) она приводит к соотношению (4). Из нее, в частности, следует, что скорость во всех точках экстремумов закона дисперсии скорость электрона равна нулю.

Ограничимся одномерным случаем и продифференцируем равенство (5) по времени, получим

$$dv/dt = \partial^2 \varepsilon / \partial p^2 \cdot dp/dt.$$

или, обозначив

$$m^* = \frac{1}{\partial^2 \varepsilon / \partial p^2},$$

$$m^* a = F,$$

Эффективная масса

так что введенный параметр  $m^*$  действительно играет роль массы. Если квазиимпульс электрона  $p$  отсчитывать от точек экстремумов (см.

[Примечание](#)), то вблизи них закон дисперсии имеет вид

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_0 + (1/2)p^2 \cdot \partial^2 \varepsilon / \partial p^2 = \varepsilon_0 + p^2 / (2m^*),$$

причем вблизи минимумов  $m^* < 0$ , а вблизи максимумов  $m^* > 0$ .

<sup>1</sup> Хочется потому, что, как мы увидим, важные электроны обычно (но не всегда!) имеют энергии вблизи точек-экстремумов 0,1,2,3,5,6,7, где зависимость  $\varepsilon(p)$  почти параболическая (правда, парабола порой перевернута).

<sup>2</sup> Например, от отрицательной массы нам удастся избавиться.

<sup>3</sup> Ясно, что любой закон дисперсии можно записать в виде  $\varepsilon(p) = p^2/2m^*$ , если считать, что эффективная масса  $m^*$  сама зависит от импульса  $p$ . Даже тогда, когда закон дисперсии можно считать параболическим, эффективная масса может сильно отличаться от массы свободного электрона.

Еще раз посмотрим на [рис.1](#). Мы видим, что исходная парабола разбилась на отдельные области, а на оси энергии появились участки, в пределах которых движение невозможно – запрещенные зоны.

Надо читать

Зона разрешенных энергий электронов в пределах квазиимпульсов  $-\frac{\hbar\pi}{a} \leq p \leq \frac{\hbar\pi}{a}$  ( $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ ) носит название 1-ой зоны Бриллюэна, следующие зоны Бриллюэна показаны на [рисунке](#). Плавный переход между различными разрешенными зонами невозможен из-за наличия запрещенных зон.

Зоны Бриллюэна

Уточним теперь характер движения электрона в пределах 1-ой зоны Бриллюэна. На участке 0 – В эффективная масса электрона положительна, и он ускоряется, На участке В – С эффективная масса  $m^* < 0$ , и происходит замедление (электрон «готовится» к отражению от решетки). В точке С он останавливается и, отражаясь, переходит в точку D, затем снова ускоряется до точки E и вновь замедляется до точки 0. Далее цикл повторяется.

Для того чтобы средняя дрейфовая скорость электрона оказалась ненулевой, т.е. для того, чтобы зона могла дать вклад в проводимость, нужно разорвать порочный круг. Он таки разрывается благодаря рассеянию - электрон просто не успевает ускориться за время свободного пробега до квазиимпульса  $\frac{\hbar\pi}{a}$ , при котором происходит отражение. В результате рассеяния где-то на участке гораздо левее точки В электрон возвращается в среднем в точку  $p = 0$ , и ускоряется вновь в том же направлении.

Роль рассеяния в проводимости

Получается очень интересная ситуация: то самое рассеяние, которое ограничивает разгон электрона (и, тем самым, проводимость) оказывается необходимым для возникновения проводимости.

В полностью заполненной зоне рассеяние невозможно (некуда перейти), и электрон обречен на бессмысленный круговорот.

Еще раз о полностью заполненной зоне

Проводимость зоны, в которой электронов меньше, чем число пустых уровней, определяется концентрацией электронов. Если же в зоне больше электронов, чем пустых мест, то узким горлом (для необходимого рассеяния) явля-



ются именно пустые места, и проводимость оказывается пропорциональной концентрации пустых мест. Запомним это для дальнейшего.

## Оптические переходы

Свободный электрон не может поглотить или испустить фотон, так как нельзя одновременно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса. При этих процессах электрон должен оставаться на параболе (3), а смещение по оси импульсов на величину импульса фотона  $\frac{\hbar\omega}{c}$  слишком мало, чтобы обеспечить смещение по оси энергий на его энергию  $\hbar\omega$ . В кристалле ситуация меняется коренным образом.

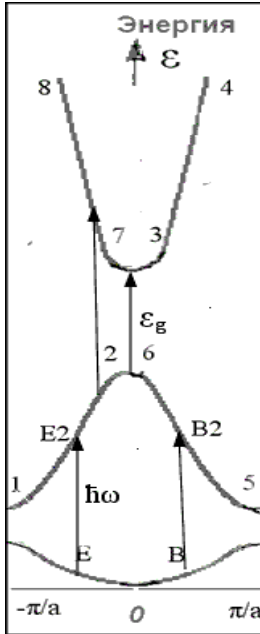
Прежде всего, недостающее изменение импульса может быть скомпенсировано решеткой. Вспомним отражение Вульфа – Брэгга. В нашей простой одномерной модели импульс электрона изменяется на  $\hbar \frac{2\pi n}{a}$ , ( $n = \pm 1, \pm 2 \dots$ ). При переходе из точки С в точку D множитель  $n = -1$ , из точки 2 в точку 6 –  $n = -2$  (см. [рис.1](#)). Сохранение полного импульса обеспечивается изменением импульса решетки. В общем случае решетка может принять или отдать импульс  $\hbar\mathbf{G}$ , где  $\mathbf{G}$  – вектор обратной решетки. Такие переходы, как мы уже знаем (см. [Проводимость металлов](#)), называются процессами переброса.

Процессы переброса

Однако, опять же, предпочитают про решетку забыть и говорить так: «Квазиимпульс электрона сохраняется с точностью до вектора обратной решетки (умноженного на постоянную Планка  $\hbar$ )». На нашем [рисунке](#) точки, между которыми возможен переход с поглощением или испусканием фотона, отстоят друг от друга на  $\frac{2\pi n}{a}$ , ( $n = \pm 1, \pm 2 \dots$ ). Выберем две такие точки (они, конечно, принадлежат разным зонам), например, точки В и В2 (или Е и Е2) и измерим расстояние между ними вдоль оси энергии. Квант света с такой энергией может быть поглощен (с *межзонным оптическим пере-*

ходом электрона  $V \rightarrow V2$ ) или испущен ( $V2 \rightarrow V$ ). Очень неудобно по рис.1 находить разрешенные переходы.

Переформируем картинку так, чтобы точки, между которыми возможны оптические переходы, находились друг под другом на одной вертикальной прямой (например,  $V$



под  $V2$ ,  $E$  под  $E2$ ). Для этого сместим все зоны Бриллюэна, начиная со второй, на вектор обратной решетки так, чтобы они оказались в пределах первой зоны. В нашем случае сместим на  $2\pi/a$  участок 2-ой зоны 5- $V2$ -6 вправо, а участок 1- $E2$ -2 влево. Аналогично перемещаем части 3-ей зоны Бриллюэна. Получающаяся картинка называется *приведенной* схемой энергетических зон.<sup>1</sup>

Разрешенные оптические переходы (поглощение фотонов) между зонами на этой схеме показаны вертикальными

стрелками.

Во многих полупроводниках валентная зона выглядит, как вторая зона на этом рисунке (1-  $E2$ -2-6-  $V2$ ), а зона проводимости – как третья зона (8-7-3-4).<sup>2</sup> **Такое допущение мы и примем во всех наших дальнейших рассуждениях.** В этом случае две нижние стрелки не соответствуют никаким переходам, потому что все уровни энергии во второй зоне заняты, а верхние стрелки соответствуют переходу электрона из валентной зоны в зону проводимости с поглощением фотона (длина стрелки – энергия этого фотона).

**Оптические переходы, при которых квазиимпульс электрона изменяется за счет импульса решетки, изображаются на приведенной схеме зон вертикальными стрелками и называются *прямыми*.**

Рис.2  
Приведенная  
схема энергетических зон

Прямые оптические переходы

<sup>1</sup> Имеется в виду приведение к первой зоне Бриллюэна. Еще говорят «схема приведенных зон», я не знаю, что лучше.

<sup>2</sup> В некоторых полупроводниках (в частности, в германии и кремнии) минимумы зоны проводимости *не* располагаются над максимумом валентной зоны, но и в таких случаях приведенная схема зон помогает разобраться со всеми вопросами межзонного поглощения света.

*Край оптического поглощения* определяется минимальной энергией фотона, при которой возможен прямой переход электрона из валентной зоны в зону проводимости. Как видно из [рис.2](#),

$$\hbar\omega_{min} = \varepsilon_g.$$

Стекло и многие кристаллы прозрачны потому, что их край оптического поглощения лежит в ультрафиолетовой области.

При освещении полупроводника достаточно интенсивным светом с частотой  $\omega \geq \omega_{min}$  часть электронов переходит из его валентной зоны в зону проводимости, возникают две не полностью заполненные зоны, и появляется проводимость, называемая *фотопроводимостью*, а сам такой переход электронов называют *внутренним фотоэффектом*. Для внутреннего фотоэффекта можно написать соотношение, по смыслу совпадающее с уравнением Эйнштейна для *внешнего* фотоэффекта:

$$\hbar\omega = \varepsilon_g + \varepsilon,$$

где  $\hbar\omega$  – энергия поглощенного фотона, а  $\varepsilon$  – кинетическая энергия электрона после его перехода в зону проводимости, а ширина запрещенной зоны  $\varepsilon_g$  играет роль работы выхода. Формула (6) определяет границу внутреннего фотоэффекта.

Наряду с прямыми переходами возможны процессы, при которых недостаток импульса фотона компенсируется импульсом фонона. При этом одновременно с поглощением фотона поглощается или испускается фонон. Такие процессы часто называются трехчастичными или электрон-фотон-фононными. Вероятность таких процессов существенно меньше, и они могут быть заметны только, если прямые переходы невозможны.<sup>1</sup>

## Рекомбинация

Рекомбинация электронов с дырками – процесс, обратный к их генерации, в результате которого электрон возвращается в валентную зону, так что на одну электрон-дырочную пару

(6) Граница внутреннего фотоэффекта

Соотношение для внутреннего фотоэффекта

---

<sup>1</sup> Существуют процессы («многофотонные» и/или «многофононные»), в которых принимают участие несколько фотонов и/или фононов. Их вероятность чрезвычайно быстро убывает с ростом числа частиц, участвующих во взаимодействии.

в кристалле становится меньше. Различают излучательную (энергия пары, большая или равная ширине запрещенной зоны, уносится фотоном) и безызлучательную рекомбинации (с рождением фононов).

Безызлучательная рекомбинация с непосредственным переходом электрона из зоны проводимости в валентную зону обычно маловероятна, так как необходимо рождение большого числа фононов. Обычно она происходит через промежуточные уровни энергии, расположенные в запрещенной зоне и принадлежащие примесным атомам (так называемым центрам рекомбинации). Такая рекомбинация называется линейной по типу уравнения, которое ее описывает в случае, когда концентрации электронов и дырок не соответствуют своим равновесным значениям. Пусть, например, в полупроводнике возникла избыточная концентрация  $\Delta n_0$  электронов в зоне проводимости, скажем, в результате внутреннего фотоэффекта. Тогда по окончании освещения проводника уравнение, описывающее изменение избыточной концентрации, имеет вид

$$d\Delta n/dt = -\Delta n/\tau$$

с решением

$$\Delta n = \Delta n_0 e^{-t/\tau}.$$

Параметр  $\tau$  в этих уравнениях называется *временем рекомбинации* или *средним временем жизни электронов*. Аналогичные формулы можно написать и для дырок.

Непосредственная рекомбинация «зона – зона» в ситуации, когда концентрации неравновесных носителей  $\Delta n$  и  $\Delta p$  существенно превосходят их равновесные значения и  $\Delta n = \Delta p$ , рекомбинация носит *квадратичный* характер и описывается уравнениями

$$d\Delta n/dt = -\gamma\Delta n^2, \quad d\Delta p/dt = -\gamma\Delta p^2.$$

Решение, например, первого из этих уравнений с начальным условием

$$\Delta n = \Delta n_0 \text{ при } t = 0$$

выглядит так:

$$\Delta n = \Delta n_0 / (1 + \gamma\Delta n_0 t).$$

Величину  $\tau = 1/(\gamma\Delta n_0)$  также называют временем рекомбинации, однако интересно, что это время зависит от начальной концентрации неравновесных носителей.

Линейная рекомбинация

Квадратичная рекомбинация  
(можно пропустить)