

К концу XIX века в основном было закончено построение величественного здания классической физики. Казалось, все основные явления механики, статистической физики, электромагнитной теории, оптики были поняты и объяснены, сформулированы соответствующие законы природы. На практически чистом небосводе оставались отдельные облачка, которыми и занялись физики того времени. Кто мог подумать, что из этих «маленьких» проблем вырастет новая физика, квантовая теория, к знакомству с которой мы и приступаем. На предыдущих лекциях мы изучали волновые свойства света, но оказывается, что свет – нечто гораздо более сложное.

## Квантовые свойства света

### Равновесное тепловое излучение

#### *Основные определения*

Все тела непрерывно излучают и поглощают электромагнитные волны,<sup>1</sup> которые здесь мы будем кратко называть излучением.

Сейчас нас будет интересовать так называемое *тепловое излучение*, т.е. испускание электромагнитных волн (и сами эти волны), *за счет внутренней энергии тела*. Это значит, что энергия, излучаемая телом равна убыли его внутренней (тепловой) энергии. Наоборот, поглощение теплового излучения приводит к увеличению внутренней энергии тела.

Тепловое  
излучение

Если тело излучает больше, чем поглощает, то оно остывает, в противном случае – нагревается.

Все остальные виды излучения называют люминесценцией.

Представим себе некоторую полость, изолированную от внешнего мира непроницаемой для излучения оболочкой.

---

<sup>1</sup> Вспомним, например, что любой заряд, движущийся с неравным нулю ускорением, излучает, а основная модель вещества для изучения взаимодействия электромагнитных волн с веществом – очень большое количество осцилляторов в той или иной степени связанных друг с другом.

Она, конечно, содержит тепловое излучение, которое можно характеризовать плотностью энергии, причем, чем она больше, тем больше стенки поглощают.

Пусть стенки находятся в состоянии равновесия при температуре  $T$ . Тогда тепловое излучение в полости приходит в равновесие со стенками, при котором сколько стенки излучают, столько же и поглощают.

Тепловое излучение, находящееся в равновесии с телами, называется *равновесным тепловым излучением*. Ему соответствует *плотность энергии равновесного теплового излучения*  $u(T)$ , зависящая от температуры стенок. Эта же температура  $T$  приписывается самому равновесному тепловому излучению.

Легко доказать, что плотность энергии равновесного излучения  $u(T)$  одинакова во всех случаях. Рассмотрим, например, две полости с одинаковыми температурами  $T$ . Допустим, что плотность энергии в первой полости больше. Соединим полости очень тонкой и ни на что не влияющей трубкой. Большая плотность приводит к большей плотности потока энергии, так что энергия начнет переходить из первой полости во вторую, где плотность энергии возрастет, поглощение стенками увеличится, и они начнут нагреваться. Стенки же первой полости будут остывать и возникнет запрещенная вторым началом термодинамики ситуация «переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому».

Тепловое излучение распределяется на весь спектр электромагнитных волн, т.е. на все частоты  $0 < \omega < \infty$ , однако вовсе не равномерно. Поэтому вводят *спектральную плотность энергии равновесного теплового излучения*  $u(\omega, T)$ . Эта такая величина, что  $u(\omega, T)d\omega$  есть плотность энергии, приходящаяся на интервал частот  $d\omega$  вблизи частоты  $\omega$ . Другими словами, произведение  $u(\omega, T)d\omega dV$  определяет энергию теплового излучения в интервале частот  $d\omega$  в объеме  $dV$ .

Ясно, что <sup>1</sup>

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T)d\omega. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Конечно,  $u(T)$  и  $u(\omega, T)$  – разные функции, для которых используется одна и та же буква  $u$ . Это не приводит к недоразумениям, потому что эти функции отличаются числом аргументов.

Равновесное  
тепловое излу-  
чение

Температура  
равновесного  
излучения

Сразу отметим, что неотрицательная функция  $u(\omega, T)$  должна обращаться в ноль при  $\omega = 0$  (не бывает таких волн) и при  $\omega \rightarrow \infty$  (иначе интеграл (1) будет расходиться, и плотность энергии  $u(T)$  станет бесконечной, что, конечно, невозможно). Поэтому при фиксированной температуре функция частоты  $u(\omega, T)$  должна иметь максимум на некоторой частоте  $\omega_m$ . Можно ожидать, что этот максимум один (если бы их было два, мы спросили бы «а почему не три?»). Впрочем, такой же вывод следует из экспериментов.

Энергия, падающая на площадку  $dS$  в единицу времени, как мы помним, вычисляется через плотность *потока* энергии, а плотность потока чего угодно есть произведение плотность этого чего-то на его скорость (в нашем случае – на скорость света). Если дополнительно учесть, что тепловое излучение распространяется в пространстве изотропно по всем направлениям, а энергия, падающая на площадку под углом  $\theta$  к нормали, пропорциональна  $\cos(\theta)$ , то для *энергии, падающей на площадку  $dS$  в единицу времени со всех направлений* можно получить следующее выражение:

$$d\Phi = \frac{c}{4} u(T) dS.$$

Если же речь идет об энергии в интервале частот  $d\omega$ , то

$$d\Phi_{d\omega} = \frac{c}{4} u(\omega, T) d\omega dS. \quad (2)$$

Спектральная плотность энергии равновесного теплового излучения  $u(\omega, T)$  – универсальная функция частоты и температуры (подобно математическим константам  $\pi$  и  $e$ ), и поэтому внимание физиков – и теоретиков и экспериментаторов – было приковано к ее нахождению. Однако экспериментаторам было удобнее работать с другой функцией, отличающейся лишь постоянным множителем, определение которой мы сейчас и дадим.

*Спектральной плотностью испускательной способности* (или спектральной плотностью энергетической светимости) называется такая функция  $r(\omega, T)$ , что <sup>1</sup>

$$r(\omega, T) d\omega dS \quad (3)$$

есть энергия, излучаемая с площадки  $dS$  в единицу времени в интервале частот  $d\omega$ .

Энергия, падающая на  $dS$  в ед. времени, в интервале  $d\omega$  со всех направлений

Спектральная плотность испускательной способности  $r(\omega, T)$

<sup>1</sup> Встречаются также обозначения  $r_{\omega, T}$ ,  $r(\omega)_T$  и т.п.

Испускательная способность различна у поверхностей различных тел.

*Энергетической светимостью* или интегральной испускательной способностью называется величина

$$R = \int_0^{\infty} r(\omega, T) d\omega, \quad (4)$$

равная энергии, излучаемой с единичной поверхности в единицу времени на всех частотах по всем направлениям.

Излучение, падающее на некоторую поверхность, может либо отражаться, либо поглощаться. Доля поглощаемой энергии на частоте  $\omega$  называется *спектральной поглощательной способностью*  $a(\omega)$ .

Энергетическая светимость  $R$

Спектральная поглощательная способность  $a(\omega)$

### **Законы равновесного теплового излучения**

Учитывая формулу (2) и определение поглощательной способности, получаем, что энергия, поглощаемая площадкой  $dS$  поверхности в единицу времени в интервале частот  $d\omega$  равна

$$a(\omega) \frac{c}{4} u(\omega, T) d\omega dS. \quad (5)$$

В силу принципа детального равновесия *в равновесном состоянии* поглощаемая энергия (5) должна быть равна испускаемой энергии (3), т.е. должно выполняться равенство

$$a(\omega) \frac{c}{4} u(\omega, T) d\omega dS = r(\omega, T) d\omega dS,$$

или

$$\frac{r(\omega, T)}{a(\omega)} = \frac{c}{4} u(\omega, T). \quad (6)$$

Закон Кирхгофа

Справа стоит, как мы знаем, универсальная функция, поэтому равенство (6) выражает следующий *закон Кирхгофа*:

В состоянии термодинамического равновесия отношение спектральной плотности испускательной способности к спектральной поглощательной способности есть универсальная функция частоты и температуры (т.е. это отношение не зависит ни от свойств тела, ни от свойств поверхности).

Абсолютно черным телом называется тело, поглощающее все падающее на него излучение. Все величины, относящиеся к абсолютно черному телу, принято маркировать звездочкой, так что по определению \*

Абсолютно черное тело

$$a^*(\omega) = 1. \quad (7)$$

Абсолютно черных тел не бывает. Даже если поглощательная способность реального тела близка к единице в оптическом диапазоне (например, сажи), то на других частотах поглощательная способность резко падает. Однако свойствами, близкими к свойствам абсолютно черного тела, обладает, например, маленькая дырка в большой бочке.

Из соотношений (6) и (7) получаем

$$r^*(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T), \quad (8)$$

так что, изучая экспериментально свечение маленькой дырки, можно построить и функцию  $u(\omega, T)$ .

Подставляя равенство (8) в формулу (6), получаем альтернативную запись закона Кирхгофа:

$$\frac{r(\omega, T)}{a(\omega)} = r^*(\omega, T). \quad (9)$$

Формула закона Кирхгофа

Конечно, нахождение универсальной функции  $u(\omega, T)$  представляет весьма значительный интерес. В 1983 году В. Вин, рассматривая сжатие излучения в полости с зеркальными стенками, показал, что эта функция должна иметь

$$u(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T), \quad (10)$$

Соотношение Вина

причем конкретный вид функции  $f(\omega/T)$  оставался неизвестным. Однако уже из этого *соотношения Вина* с неизвестной функцией можно было получить важные законы теплового излучения.

Мы уже говорили, что при фиксированной температуре функция  $u(\omega, T)$  имеет максимум на некоторой частоте  $\omega_m$ . Поскольку температура входит только в комбинации  $\omega/T$ , то должно быть

$$\omega_m/T = const. \quad (11)$$

Формально это соотношение можно получить так. Введем переменную  $x = \omega/T$  и вычислим точку максимума  $x_m = \omega_m/T$ :

$$\frac{d(T^3 x^3 f(x))}{dx} \Big|_{x=x_m} = 0,$$

или

$$3x_m^2 f(x_m) + x_m^3 f'(x_m) = 0.$$

Это *алгебраическое* уравнение для нахождения значения  $x_m$  (представьте себе, что мы знаем функцию  $f(x)$  – скоро мы ее узнаем!), так что величина  $x_m$  (а с ней и  $\omega_m/T$ ) – просто число. Отсюда и следует соотношение (11).

Обычно формулу (11) записывают несколько иначе. Физики-теоретики предпочитают работать с частотой  $\omega$ , а экспериментаторы и оптики – с длиной волны  $\lambda$ . Все ранее введенные функции ( $u(\omega, T), r^*(\omega, T)$ ) можно записать как функции длины волны. Это *другие* функции, но обычно для их обозначения сохраняют те же буквы. На первый взгляд может показаться, что достаточно сделать замену переменной

$$\omega = 2\pi c/\lambda,$$

но это не совсем так. Любому интервалу частот  $d\omega$  соответствует по этому соотношению интервал длин волн  $d\lambda$ . В следующей формуле бы будем использовать *длины* этих интервалов, поэтому, имея в виду, что знаки  $d\omega$  и  $d\lambda$  противоположны (длина волны убывает при росте частоты), будем писать  $|d\omega|$  и  $|d\lambda|$ . Энергии, приходящиеся на соответствующие друг другу интервалы, конечно, равны, так что

$$u(\omega, T)|d\omega| = u(\lambda, T)|d\lambda|,$$

или

$$u(\lambda, T) = u(\omega, T) \Big|_{\omega=\frac{2\pi c}{\lambda}} \cdot \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right|. \quad (12)$$

Аналогично получается и связь между функциями  $r^*(\omega, T)$  и  $r^*(\lambda, T)$ . Аналог формулы (8) имеет вид

$$r^*(\lambda, T) = \frac{c}{4} u(\lambda, T),$$

а соотношение Вина принимает вид

$$u(\lambda, T) = \frac{(2\pi c)^4}{\lambda^5} f(2\pi c/\lambda T).$$

Обозначим  $\lambda_m$  длину волны, на которую приходится максимум функции  $u(\lambda, T)$  или, что то же, максимум спектральной плотности испускательной способности *абсолютно черного тела* в состоянии равновесия.<sup>1</sup> Тогда те же рассуждения, что привели нас к формуле (11), показывают, что выполняется *закон смещения Вина*

$$\lambda_m T = b, \quad (13)$$

где постоянная  $b \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

При повышении температуры длина волны, на которую приходится максимум излучения, смещается в сторону корот-

Закон смещения Вина

---

<sup>1</sup> Важно!  $\omega_m \neq \frac{2\pi c}{\lambda_m}$ , хотя эти величины довольно близки.

ких волн. Для комнатной температуры  $\lambda_m \sim 10 \mu\text{м}$ , т.е. максимум находится в невидимой инфракрасной области.

Для реальных тел законы теплового излучения выполняются лишь приблизительно. В следующем примере, кроме того, нарушено условие равновесия, и, тем не менее, основные закономерности сохраняются.

Изготовим бочку из тугоплавкого материала и сделаем в ней дырку. При комнатной температуре никакого свечения не видно, дырка кажется черной, поскольку к тому же ничего не отражает. Будем нагревать бочку. При температуре  $\sim 1000\text{К}$  появится «красное каление»: спектр теплового излучения входит в видимую область со стороны длинных волн. При температуре  $\approx 1300\text{К}$  цвет излучения становится желтым, а при  $1600\text{К}$  появляется то, что называется «белым калением»: весь видимый диапазон заполняется тепловым излучением, однако его максимум ( $\lambda_m$ ) еще находится в инфракрасной области. Оцените, до какой температуры нужно нагреть тело, чтобы длина волны  $\lambda_m$  оказалась на границе видимого диапазона.

Тело, сильнее поглощающее, сильнее и светится. Поэтому когда свечение бочки станет заметным, ярче всего будет светиться дырка.

Вернемся к [соотношению Вина \(10\)](#) и вычислим энергетическую светимость абсолютно черного тела по формуле [\(4\)](#):

$$R^* = \int_0^\infty r^*(\omega, T) d\omega = \frac{c}{4} \int_0^\infty \omega^3 f(\omega/T) d\omega.$$

В интеграле сделаем замену переменной  $x = \omega/T$ :

$$R^* = T^4 \frac{c}{4} \int_0^\infty x^3 f(x) dx.$$

Интеграл опять есть «просто число», постоянная, так что

$$R^* = \sigma T^4. \tag{14}$$

Это равенство носит название закона Стефана – Больцмана, а величина

$$\sigma = \frac{c}{4} \int_0^\infty x^3 f(x) dx$$

называется постоянной Стефана – Больцмана. Она была сначала определена экспериментально, но может быть и вычислена при известной функции  $f(\omega/T)$ .

Мы видим, что энергетическая светимость абсолютно черного тела очень быстро увеличивается с ростом температуры. Именно поэтому свечение тела при нагреве становится за-

Закон  
Стефана -  
Больцмана

метным задолго до того, как максимум спектральной плотности испускательной способности придет в видимую область.

Рассмотренные законы теплового излучения сами по себе представляют значительный интерес. Однако как все-таки выглядит сама универсальная формула?

Энергия теплового излучения – аналог внутренней энергии газа  $U$ . Напомню формулу

$$U/V = g \cdot \frac{kT}{2}, \quad (15)$$

где

$g = i \cdot n$  – плотность числа степеней свободы ( $i$  число степеней свободы одной молекулы, а  $n$  – концентрация молекул).

Эта формула отражает принцип равнораспределения энергии по степеням свободы – с точки зрения классической физики на каждую степень свободы в состоянии термодинамического равновесия приходится энергия  $\frac{kT}{2}$ .

Роль степеней свободы для электромагнитных волн играют моды - различные типы стоячих волн, возможные в рассматриваемой полости. Простая модель приводит к следующему выражению для числа мод в единице объема в интервале частот  $d\omega$ :

$$g(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \quad (16)$$

Эту формулу вы выведем позднее, что называется, «заодно».<sup>1</sup> На каждую моду излучения приходится «двойная порция» энергии, равная  $kT$  (по половинке на электрическую и магнитную части). Эта ситуация аналогична тому, что и на колебательную степень свободы приходится двойная энергия (на кинетическую и потенциальную части). Поэтому спектральная плотность энергии должна иметь вид:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT, \quad (17)$$

а спектральная плотность испускательной способности абсолютно черного тела (см. (8)) –

$$r^*(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c} kT. \quad (18)$$

Формула  
Рэля-Джинса

То же для испускательной способности

<sup>1</sup> См. лекцию «Проводимость металлов», стр. 6 – 8.



Формула (17) (или (18)) называется формулой Рэля – Джинса. Она удовлетворяет [соотношению Вина](#) с функцией  $f(\omega/T) = (\omega/T)^{-1}$ , однако не имеет максимума, и энергетическая светимость (4) оказывается бесконечной!

Только в области малых частот формула Рэля - Джинса согласуется с экспериментальными данными, но со стороны коротких («ультрафиолетовых»<sup>1</sup>) волн оказывается неприемлемой. С другой стороны, вывод ее сточки зрения классической физики абсолютно безупречен. Безысходность возникшей ситуации отразилась в ее названии – «ультрафиолетовая катастрофа».

### ***Гипотеза Планка***

Занимался проблемой «ультрафиолетовой катастрофы» и немецкий физик-теоретик Макс Карл Эрнст Людвиг Планк. Сначала ему удалось получить правильную формулу почти на интуитивном уровне, а 14 декабря 1900г. он сделал доклад на заседании Немецкого физического общества, где показал ее теоретический вывод. Это день считается днем рождения квантовой физики.

Для доказательства своей формулы Планк выдвинул по тем временам совершенно немыслимую гипотезу.

Излучение и поглощение энергии происходит не непрерывно, а порциями, названными квантами энергии (квантами света), потому что любой осциллятор не может иметь произвольную энергию, а только энергию из набора разрешенных значений

$$0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots \quad (19)$$

Задумайтесь на секунду. Простейший осциллятор в классической механике – грузик на пружинке. Так вот он не может иметь произвольную энергию! Почему же мы не замечаем эту дискретность энергии? Да просто потому, что величина  $\varepsilon_0$  чрезвычайно мала по сравнению с любыми макроскопическими энергиями, никакие приборы не позволят ее заметить в нашем

Гипотеза  
Планка

---

<sup>1</sup> Хотя она не годилась даже для видимого диапазона

мире. Другое дело микромир, где дискретность, как мы увидим, играет решающую роль.

Гипотеза Планка приводит к тому, что средняя энергия осциллятора, т.е. средняя энергия, приходящаяся на одну колебательную степень свободы, равна не  $kT$ , а

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}. \quad (20)$$

Эту формулу нетрудно получить, если вспомнить, что по теории Больцмана вероятность состояния с энергией  $\varepsilon$  пропорциональна  $e^{-\varepsilon/kT}$ , так что по общей формуле для средних значений (Лекция 0 прошлого семестра)

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \varepsilon_0 e^{-n\varepsilon_0/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon_0/kT}}. \quad (21)$$

Сумма в знаменателе – сумма геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1/(1 - e^{-x}).$$

Продифференцировав по  $x$  левую и правую часть последнего равенства<sup>1</sup> получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = e^{-x}/(1 - e^{-x})^2$$

Ряд в левой части как раз такой, какой нам нужен для числителя (21). Подставляем, чуть-чуть упрощаем и получаем (20).

Подставляя среднюю энергию (20) вместо  $kT$  в формулу (17), получаем

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}. \quad (22)$$

Для того чтобы удовлетворить соотношению Вина (10), достаточно положить, что поглощаемый квант энергии пропорционален частоте света<sup>2</sup>:

$$\varepsilon_0 = \hbar \omega. \quad (23)$$

Коэффициент пропорциональности  $\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с (читается «аш перечеркнутое») называется постоянной Планка.

Поскольку в соотношениях между  $\omega$  и  $\lambda$  входит множитель  $2\pi$ , то при использовании формул с длиной волны используется и другая постоянная Планка,<sup>3</sup> не перечеркнутая:

$$h = 2\pi\hbar.$$

Запомнить это соотношение очень легко, приглядитесь: черточка от буквы  $\hbar$  продолжает крышечку над буквой  $\pi$ .

Постоянная  
Планка

<sup>1</sup> Если хотите, то проверьте, что ряд сходится равномерно, так что его можно дифференцировать. Вообще в физике многое сходится так, как надо.

<sup>2</sup> Или собственной частоте осциллятора, поскольку свет поглощается и испускается именно на резонансной частоте.

<sup>3</sup> Сам Планк пользовался этой постоянной. Перечеркнутый вариант появился позднее.

Подставляем (23) в (22) и окончательно получаем формулы Планка для спектральной плотности энергии равновесного теплового излучения

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (24)$$

Формула Планка

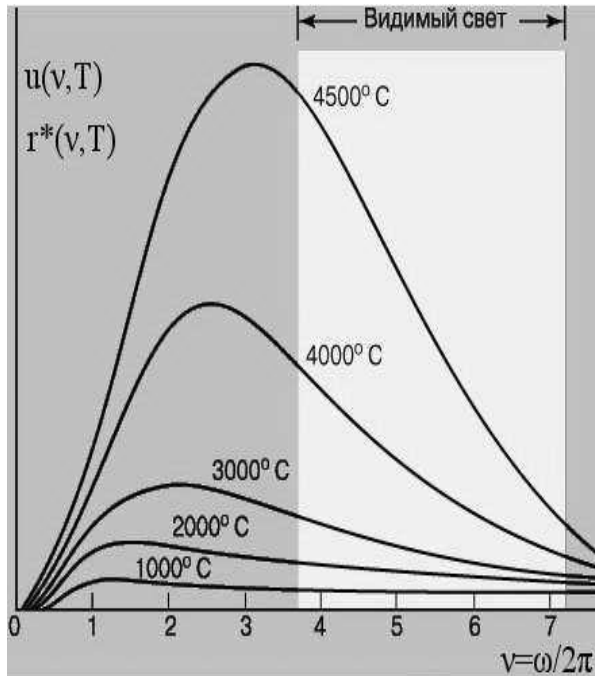
и для спектральной плотности испускательной способности абсолютно черного тела

$$r^*(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (25)$$

Другая формула Планка

Формулы Планка (24) и (25) переходят в формулы Рэлея – Джинса, если выполняется условие  $\hbar\omega/kT \ll 1$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить разложение Тейлора

$$e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \hbar\omega/kT.$$



Функции Планка для нескольких значений температуры показаны на рисунке.<sup>1</sup> Обратите внимание, как максимумы следуют закону смещения Вина и как растет площадь под кривыми при росте температуры.

Наконец, переходя к распределению по длинам волн согласно (12), имеем

$$r^*(\lambda, T) = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\hbar c/(\lambda kT)}}. \quad (26)$$

Еще формула Планка

**Задание.** Нарисуйте примерные графики этой функции хотя бы для двух температур.

Задание

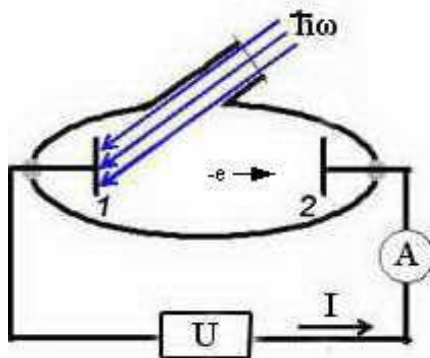
Зная конкретный вид функций  $u(\omega, T)$ ,  $r^*(\omega, T)$  и  $r^*(\lambda, T)$ , можно вернуться к выводу законов смещения Вина и Стефана – Больцмана. Это вы сделаете на практических занятиях.

<sup>1</sup> Я много раз говорил, что не умею, к сожалению, рисовать. Это лучшее, что удалось найти в интернете, но, увы, в зависимости от частоты  $\nu = \omega/(2\pi)$ .

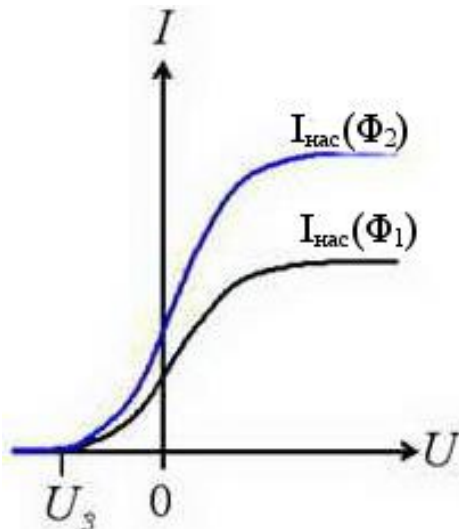
Интересно отметить, что наличие в результате расчетов постоянной Планка говорит о том, что этот результат не может быть получен в рамках классической теории (например, формула Планка), а ее отсутствие сохраняет такую возможность.

## Фотоэффект

Фотоэффект заключается, как вы знаете из школы, в испускании электронов веществом



под воздействием электромагнитного излучения. Эффект был открыт Г. Герцем, впервые исследован А.Г. Столетовым с помощью установки, схематически показанной на рисунке. Электроны «вырываются» светом частоты  $\omega$  из металлического катода 1 и, добегая до анода 2, замыкают цепь, к которой приложено напряжение  $U$ . Вольтамперная характеристика фотоэффекта показана на следующем рисунке. Положительное напряжение ускоряет электроны и приводит к росту тока проводимости, однако когда все испускаемые катодом электроны достигают до анода, рост тока прекращается на некотором значении  $I_{\text{нас}}$ . Этот ток насыщения определяется, очевидно, полным числом электронов, вырывае-



мых светом в единицу времени.

Отрицательное напряжение тормозит электроны, так что анода достигают только достаточно быстрые из них. При *задерживающем* напряжении  $U_3$ , таком что  $|U_3| = \varepsilon_{\text{max}}$ , где  $\varepsilon_{\text{max}}$  – максимальная кинетическая энергия испускаемых электронов, фототок прекращается. Измеряя это напряжение, можно определить максимальную энергию и максимальную скорость  $v_{\text{max}}$  электронов:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{2eU_3/m_e}.$$

Полученные экспериментально закономерности, некоторые из которых мы сейчас перечислим, никак не согласовывались с классической теорией.

Во-первых, ток насыщения пропорционален не интенсивности (т.е. плотности потока), как получается по классической теории, а потоку световой энергии  $\Phi$  (на рис.  $\Phi_2 > \Phi_1$ ).<sup>1</sup>

Во-вторых, напряжение задержки  $U_3$ , т.е. максимальная кинетическая энергия вырываемых электронов, зависит *только* от частоты, хотя по классической теории она должна зависеть как частоты, так и от интенсивности.<sup>2</sup>

Наконец, существует минимальная частота  $\omega_{min}$ , с которой начинается фотоэффект. Соответствующая длина волны  $\lambda_K$ , называется *красной границей* фотоэффекта. Для его наблюдения должно выполняться условие

$$\lambda < \lambda_K. \quad (27)$$

Для объяснения закономерностей фотоэффекта А. Эйнштейн предположил, следуя Планку, что квант света  $\hbar\omega$  может поглощаться только *целиком*, часть его идет на работу по преодолению связи  $A$ , а остальная переходит в кинетическую энергию  $\varepsilon$  вырываемого электрона:

$$\hbar\omega = A + \varepsilon. \quad (28)$$

Не все электроны одинаково сильно связаны с решеткой металла. Минимальная энергия, необходимая для вырывания электрона, называется *работой выхода*  $A_{вых}$ .<sup>3</sup> Ясно, что если затрачивается минимальная работа, то электрон получает максимальную кинетическую энергию  $\varepsilon_{max}$ :

$$\hbar\omega = A_{вых} + \varepsilon_{max}.$$

В таком виде это соотношение для энергий называется *уравнением Эйнштейна для фотоэффекта*.

Из этого уравнения сразу следует наличие красной границы: фотоэффект не возможен, если  $\hbar\omega < A_{вых}$ , так что

$$\omega_{min} = A_{вых}/\hbar,$$

а красная граница дается формулой

Закономерности фотоэффекта

Условие наблюдения

Работа выхода

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

<sup>1</sup> Если диаметр светового пучка и размер катода постоянны, то между этими зависимостями нет разницы, поэтому часто можно слышать утверждение, что фототок пропорционален интенсивности излучения.

<sup>2</sup> Более того, при увеличении частоты излучения по классической теории максимальная кинетическая энергия должна уменьшаться, а эксперимент показывает ее увеличение.

<sup>3</sup> В дальнейшем мы уточним понятие работы выхода.

$$\lambda_k = 2\pi c / \omega_{min} = hc / A_{вых}. \quad (29)$$

Кроме того, видно, что максимальная кинетическая энергия электронов определяется только частотой излучения

$$\varepsilon_{max} = \hbar(\omega - \omega_{min}).$$

Есть, однако, одна тонкость. По гипотезе Планка свет поглощается и испускается квантами, поскольку они соответствуют разности двух ближайших возможных значений энергии осциллятора. Но из металла вырываются свободные электроны, никаких осцилляторов нет. Поэтому понадобилось расширение гипотезы Планка – гипотеза Эйнштейна.

Свет не только поглощается и излучается, но и распространяется квантами. Эти кванты света в дальнейшем получили название *фотонов*.

Фотоны – как бы частицы, распространяющиеся со скоростью света. Но с такой скоростью могут распространяться только объекты с нулевой массой покоя. Вспомним формулу для полной энергии  $E$  материальной точки с массой покоя  $m_0$  и импульсом  $p$ :  $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ . Если  $m_0 = 0$ , то  $E = cp$ .

Энергия фотона  $E = \hbar\omega$ , поэтому его импульс есть

$$p = \hbar\omega/c = \hbar k, \quad (30)$$

где  $k$  – волновое число.

Теперь понятно и то, почему ток насыщения пропорционален световому потоку: световой поток стал, по сути, потоком фотонов, и естественно, что число вырываемых в единицу времени электронов есть какая-то доля от падающих за то же время фотонов.<sup>1</sup>

Непонятно совсем другое, а именно то, что мы обсудим в следующем параграфе.

Гипотеза  
Эйнштейна

<sup>1</sup> Существуют и другие ситуации, когда результаты экспериментов можно объяснить только на основе квантовых представлений. К ним относится эффект Комптона: рассеяние фотонов на электронах, при котором увеличивается длина волны рассеянного света на величину

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos(\theta)),$$

где  $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$  – комптоновская длина волны электрона, а  $\theta$  – угол рассеяния. Это увеличение происходит за счет передачи электрону части энергии фотона  $\hbar\omega$ . Подробнее см., например, в учебнике Л.К. Мартинсона и Е.В. Смирнова.

Эффект  
Комптона изу-  
чить самостоя-  
тельно

## Корпускулярно-волновой дуализм света

Корпускула в переводе – частица, а дуализм – мудреное слово, обозначающее «двойственность», так что заголовок этого параграфа говорит о двойственной природе света «частица – волна». В каких-то ситуациях свет ведет себя как поток частиц, а в других – как волна. Мы так говорим, потому что ничего кроме частиц и волн представить себе не можем на основании повседневного опыта. С пеленок мы знакомы с телами (игрушками), в школе знакомимся с различными типами волн (знакомых нам по луже воды), но больше ничего не воспринимаем своими органами чувств. Будем же привыкать к тому, что мир устроен значительно сложнее. На самом деле, свет – *не* корпускулы и *не* волны, просто в тех или иных условиях проявляет себя привычным для нас образом.

Так разрешается многовековой спор о природе света.

Еще Эвклид поставил вопрос, что такое свет. Первую стройную корпускулярную концепцию природы света построил И. Ньютон. Именно он исследовал дисперсию света и впервые установил, что белый свет представляет собой комбинацию различных цветов. Многие из известных тогда оптических явлений он объяснил с единой корпускулярной точки зрения. Понадобилось много времени, чтобы преодолеть авторитет великого человека.

К концу XIX века восторжествовала волновая теория света, а вот в начале XX века возникла ситуация, которую У. Брэгг описал так: «Каждый физик вынужден по понедельникам, средам и пятницам считать свет состоящим из частиц, а в остальные дни недели – из волн».

Если свет – единая сущность – только *проявляется* двояко, то его корпускулярные и волновые характеристики должны быть связаны между собой. Два таких соотношения мы уже знаем:

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (31)$$

Соотношение (30) мы переписали в векторном виде, поскольку импульс фотона и волновой вектор должны быть направлены в одну сторону.

Связь между квантовыми и волновыми характеристиками

Формулы (31) устанавливают связь между корпускулярными (энергия, импульс фотона) и волновыми (частота волны, волновой вектор) характеристиками света.

Кроме того, воздействие на вещество (почернение фотопластины, яркость интерференционной картины) с волновой точки зрения пропорциональны произведению  $E(\mathbf{r}, t)E^*(\mathbf{r}, t)$ , с корпускулярной – плотности фотонов  $n_{ph}$ . Поэтому должно быть

$$n_{ph} \propto E(\mathbf{r}, t)E^*(\mathbf{r}, t). \quad (32)$$

Наконец, еще одно очень важное обстоятельство. Не надо думать, что волновые свойства проявляются у большого множества фотонов или что это следствие их какого-то взаимодействия. Соберем любую установку (например, по схеме Юнга) для наблюдения интерференции. Запомним картину на экране, когда на вход падает пучок света. Теперь поступим так. Пошлем на вход один фотон.<sup>1</sup> Пойдем поспим. Выпустим еще один фотон, позавтракаем, пошлем еще фотон и т.д. Постепенно на экране будет прорисовываться *интерференционная картина*. Предсказать, куда точно попадет очередной фотон, невозможно, однако ясно, что вероятность попасть в максимум интерференционной картины должна быть самая высокая, а вероятность угодить в минимум – самая низкая. Вообще, вероятность  $dP$  обнаружить фотон в объеме  $dV$  пропорциональна интенсивности света:

$$dP \propto E(\mathbf{r}, t)E^*(\mathbf{r}, t)dV. \quad (33)$$

Подытожим. Можно говорить только о вероятности того, что фотон находится в той или иной области пространства, причем это его «вероятностное поведение» непосредственно связано с его волновыми свойствами.

Квантовые свойства проявляются в тех экспериментах, когда в результате взаимодействия с веществом происходит сильная локализация (например, в фотоэффекте выбивается конкретный электрон).

К этим вопросам мы вернемся чуть позже. В частности поймем, почему *квантовые свойства света проявляются тем сильнее, чем короче длина волны*.

Вероятность обнаружить фотон в объеме  $dV$

<sup>1</sup> В наши дни это можно сделать.