УДК 004-62,51-37

Компьютерное упрощение символьных выражений с обратными тригонометрическими и гиперболическими функциями

©А.С. Епифанов, А.М. Никифоров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены способы преобразования логарифмических функций в обратные тригонометрические и гиперболические функции. Предложен метод компьютерного упрощения символьных выражений, основанный на логарифмических представлениях обратных тригонометрических и гиперболических функций, упрощении логарифмических выражений и, возможно, повторного восстановления тригонометрических или гиперболических функций Примеры использования предлагаемых методов доступны на сайте http://PifMath.ru.

Ключевые слова: *символьные вычисления, компьютерная математика, логарифмическая функция комплексного переменного, обратные тригонометрические функции, обратные гиперболические функции, упрощение выражений.*

Как известно, не существует универсальных алгоритмов для упрощения символьных выражений произвольного вида, поэтому наличие тех или иных функций определяет используемые для достижения этой цели алгоритмы.

Например, простой метод упрощения выражений с тригонометрическими и гиперболическими функциями описан в гл. 7 книги [1]. Он основан на раскрытии (expansion) и последующем сжатии (contraction) этих функций. Раскрытие приводит к аргументам, не содержащим сумм и кратных переменных, а сжатие – к отсутствию целых степеней функций и единственности их в любом произведении. В гл. 8 книги [2] предложен несколько измененный подход к упрощению тригонометрических (гиперболических) выражений, включающий в себя обязательный переход к экспоненциальным функциям после раскрытия. При этом, во-первых, сжатие происходит в рамках автоматического упрощения (см. ниже), а во-вторых появляется возможность осуществить сокращение символьной дроби и факторизацию выражения не только сразу после раскрытия, когда они могут быть затруднены наличием разных функций одной и той же переменной, но и после преобразования к экспонентам, устраняющего эти затруднения. В конце выполняется обратный переход к тригонометрическим и гиперболическим функциям.

Аналогичный метод применим и к выражениям, содержащим обратные тригонометрические и гиперболические функции (ОТиГФ). Сначала осуществляется переход к логарифмическим представлениям, которые упрощаются, как это описано в [3], а затем, после сжатия логарифмических функций, может выполняться обратный переход к ОТиГФ.

Все изложенные ниже подходы к упрощению выражений с ОТиГФ прошли апробацию в программе ПифМат, доступной на сайте http://PifMath.ru. Там же размещены файлы с примерами для этой программы.[1]

Возникающие при этом дополнительные сложности связаны с многозначностью этих функций. Имея в виду, что любые упрощенные символьные выражения, в конечном счете, предназначены для численных расчетов, требующих однозначных числовых результатов, мы сконцентрируем внимание на *главных ветвях* рассматриваемых функций (иначе, на их *главных* значениях). Достигаемая при этом однозначность приводит к серьезным осложнениям, связанным с тем, что такие важные для упрощений преобразования, как

$$\ln(uv) \leftrightarrow \ln(u) + \ln(v) \tag{1}$$

и

$$\ln(u^p) \leftrightarrow p \cdot \ln(u), \tag{2}$$

оказываются справедливыми далеко не во всех случаях. Достаточные признаки корректности таких преобразований, легко проверяемые программно, представлены в работе [3], на которую мы будем постоянно ссылаться, например, «признак 4 из [3]».

Логарифмические представления ОТиГФ фактически являются их определениями на комплексной плоскости. Заметим, что выбор этих представлений неоднозначен и определяется несколькими требованиями, обсуждаемыми, например, в работах [4 – 6]. Мы примем наиболее употребительные в настоящее время определения.[2]

$$\operatorname{arctg}(z) = \frac{i}{2}(\ln(1 - iz) - \ln(1 + iz)), \tag{3}$$

$$\arcsin(z) = -i \cdot \ln(\sqrt{1 - z^2} + iz), \tag{4}$$

$$\arccos(z) = -i \cdot \ln(z + i\sqrt{1 - z^2}), \tag{5}$$

$$\operatorname{arth}(z) = \frac{1}{2}(\ln(1 + z) - \ln(1 - z)), \tag{6}$$

$$\operatorname{arsh}(z) = \ln(\sqrt{1 + z^2} + z), \tag{7}$$

$$\operatorname{arch}(z) = \ln(z + \sqrt{(z - 1)} \cdot \sqrt{(z + 1)}), \tag{8}$$

где имеются в виду, конечно, главные ветви логарифмических и степенных функций (см., например, [3]). В главе 3 книги [2] на основе этих определений проанализированы и доказаны многие свойства ОТиГФ. Далее мы рассмотрим те из них, которые имеют непосредственное отношение к упрощению выражений с ОТиГФ. Здесь же только заме-

---

[1] Начальные примеры см. в /Additions2/InverseTrigoHyper/TrigoOfArc.mtp.

[2] В этой работе мы ограничимся функциями, определения которых здесь приведены. Как и в работе [3], зарезервируем обозначения m, n для целых, x, y для действительных, а w, z – для комплексных величин и выражений (точнее, для выражений, которые могут принимать комплексные значения).

тим, что линии разреза ОТиГФ наследуются от логарифмической функции (для обоих арктангенсов непосредственно, а для остальных функций[1] – через степенную функцию – корень квадратный). Хотя эта информация не имеет прямого отношения к упрощению выражений, мы дадим сводку линий разрезов ОТиГФ в Дополнении 1, поскольку это может быть полезно пользователю, разрешившему программе игнорировать значения на линиях разреза[2] и желающему проконтролировать полученные результаты.

Будем называть *естественной* область определения ОТиГФ, соответствующую значениям элементарных тригонометрических и гиперболических функций действительной переменной. Для функций $\mathrm{arcsin}(x), \mathrm{arccos}(x)$ и $\mathrm{arth}(x)$ это сегмент $[-1, +1]$, для $\mathrm{arctg}(x)$ и $\mathrm{arsh}(x)$ − сегмент $[-\infty, +\infty]$, а для $\mathrm{arch}(x)$ − сегмент $[1, +\infty]$. Мы включаем в область определения как бесконечные точки, так и точки, приводящие к бесконечным значениям функции:

$$\mathrm{arctg}(-\infty) = -\pi/2,\ \mathrm{arctg}(+\infty) = \pi/2, \tag{9}$$

$$\mathrm{arth}(+1) = +\infty,\ \mathrm{arsh}(-\infty) = -\infty,\ \mathrm{arsh}(+\infty) = +\infty,\ \mathrm{arch}(+\infty) = +\infty. \tag{10}$$

Естественные области значений ОТиГФ – области значений, соответствующие главной ветви элементарных ОТиГФ: для функций $\mathrm{arcsin}(x)$ и $\mathrm{arctg}(x)$ – сегмент $[-\pi/2, +\pi/2]$, для $\mathrm{arccos}(x)$ – сегмент $[0, \pi]$, для $\mathrm{arsh}(x)$ и $\mathrm{arth}(x)$ – сегмент $[-\infty, +\infty]$ и для $\mathrm{arch}(x)$ – сегмент $[0, +\infty]$.

В естественной области определения формулы (3) – (8) сохраняют все элементарные свойства ОТиГФ, в частности, если иметь в виду и естественную область значений, по отношению к прямым тригонометрическим и гиперболическим функциям. В общем же случае далеко не все «элементарные» равенства оказываются справедливыми. Мы последовательно проанализируем различные ситуации упрощения выражений с ОТиГФ.

Автоматическое упрощение ОТиГФ.

Главная задача автоматического упрощения (см. гл. 3 книги [7] и гл. 4 книги [2]) – унификация выражений, необходимая для таких преобразований, как приведение подобных членов, слияние степенных функций, простейшие сокращения и т.п.[3] Такая унификация достигается как упорядочиванием самого выражения и его подвыражений, так и выполнением некоторых простых преобразований. Вопрос о том, какие именно преобразования следует включать в автоматическое упрощение, не прост, о чем свидетельствует тот факт, что разные системы компьютерной математики (алгебры) имеют разные наборы таких преобразований. С одной стороны, поскольку автоматическое упрощение про-

[1] Для обоих арккосинусов аргумент внешнего логарифма также отрицателен на части линий разреза, определенных по квадратным корням. Нетрудно показать, что логарифм арксинусов не может быть отрицательным числом. Впрочем, мы в этом убедимся чуть позже другим способом.

[2] Что сильно упрощает упрощающие преобразования [3].

[3] Кстати говоря, эти преобразования также входят в автоматическое упрощение и, в конечном счете, выполняют задачу унификации выражений. Сразу заметим, что полное устранение неоднозначностей весьма часто оказывается невозможным [3].

изводится постоянно, после выполнения практически всех операций,[1] набор автоматически выполняемых операций должен быть небольшим и не должен содержать сложных процедур. С другой стороны, расширение этого набора позволяет в большей степени добиться унификации и, тем самым, облегчить задачу расширенного упрощения. Некоторые преобразования, например,

$$z^p z^q \to z^{p+q},\ (z^p)^n \to z^{np},\ (uv)^n = u^n v^n,$$ [2]

$$\sin(\pi/6) = 1/2,\ \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \tag{11}$$

$$\sin(-z) \to -\sin(z),\ \cos(-z) \to \cos(z), \tag{12}$$

входят в автоматическое упрощение практически всех систем. Многие системы (исключительно в целях унификации) включают и преобразования типа

$$\sin(iz) \to i \cdot sh(z),\ sh(iz) \to i \cdot sin(z),\ \cos(iz) = ch(z). \tag{13}$$

По аналогии с преобразованиями (11) в автоматическое упрощение ОТиГФ могут быть включены формулы (9), (10), а также

$$\arcsin(0) = 0, \arcsin(1/2) = \pi/6, \arcsin\left(\sqrt{2}/2\right) = \pi/4,$$

$$\arcsin(\sqrt{3/2}) = \pi/3,\ \arcsin(1) = \pi/2$$

и соответствующие значения для тригонометрических арккосинусов и арктангенсов. Формулы симметрии

$$\mathrm{arctg}(-z) = -\mathrm{arctg}(z) \text{ и } \mathrm{arth}(-z) = -\mathrm{arth}(z) \tag{14}$$

сразу следуют из определений (3) и (6). Докажем, что

$$\arcsin(-z) = -\arcsin(z). \tag{15}$$

Для этого рассмотрим сумму

$$S = \ln\left(\sqrt{1-z^2} - iz\right) + \ln(\sqrt{1-z^2} + iz).$$

Логарифмы можно слить по признаку 6б из работы [3], поскольку произведение их аргументов равно единице, а сумма, очевидно, принадлежит правой комплексной полуплоскости, так что $S = \ln(1) = 0$. Сравнение суммы S с определением (4) доказывает формулу (15). Одновременно мы получили эквивалентное определение арксинуса

$$\arcsin(z) = i\ln(\sqrt{1-z^2} - iz).$$

Кроме того, учитывая, что $(\sqrt{1-z^2} - iz)^{-1} = \sqrt{1-z^2} + iz,$ из доказанного равенства нулю суммы S получаем

$$\ln((\sqrt{1-z^2} - iz)^{-1}) = -\ln(\sqrt{1-z^2} - iz),$$

что означает, что выражение $\sqrt{1-z^2} - iz$ не может быть отрицательным числом ни при каких значениях z. Конечно, этот факт легко проверяется «на бумаге», но программно установить его довольно не просто, признак 6б как бы делает это автоматически.

---

[1] Добавим еще, что в него, обычно, никак не может вмешаться пользователь.

[2] Последнее из показанных преобразований интересно тем, что, будучи необходимым на промежуточных стадиях, само по себе, строго говоря, упрощением считаться не может, и на последней стадии расширенного упрощения может выполняться в обратном направлении.

Аналогично доказывается, что

$$\operatorname{arsh}(-z) = -\operatorname{arsh}(z). \tag{16}$$

Для доказательства того, что

$$\arccos(-z) = \pi - \arccos(z), \tag{17}$$

имея в виду (5), проанализируем сумму

$$S = \ln\left(-z + i\sqrt{1 - z^2}\right) + \ln\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right).$$

Здесь произведение аргументов равно минус единице, и можно воспользоваться признаком 6г. Умножая согласно этому признаку аргументы на $-i$ и вычисляя их сумму, убеждаемся, что она принадлежит правой комплексной полуплоскости, так что

$$S = \ln(-1) = i\pi,$$

и равенство (17) с учетом (5) доказано.

Попутно докажем, что

$$\arcsin(z) + \arccos(z) = \pi/2. \tag{18}$$

Для этого нужно вычислить сумму (см. (4) и (5))

$$-i \cdot \ln(\sqrt{1 - z^2} + iz) - i \cdot \ln(z + i\sqrt{1 - z^2}). \tag{19}$$

Произведение аргументов равно i, и можно воспользоваться признаком 6а, умножая аргумент второго логарифма на $-i$, так что сумма $\left(\sqrt{1 - z^2} + iz\right) - i\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right) = 2\sqrt{1 - z^2}$ вновь оказывается принадлежащей правой комплексной полуплоскости, а логарифм произведения – равным $i\pi/2$.

Никакие специальные соотношения между функциями не должны не только входить в автоматическое упрощение, но и вообще «зашиваться» в программу, они получаются «сами по себе» в процессе расширенного упрощения. Например, тождество $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ проявляется при переходе к экспоненциальной форме записи тригонометрических функций. То же касается и формулы (18). Результат должен получаться при переходе к логарифмическим представлениям и слияния логарифмов, как это описано в [3], в данном случае с помощью признаков 6.

Заметим, что в общем случае для применения признаков 6 необходимо определение знаков и возможности обращения в ноль действительной и мнимой частей символьного произведения аргументов логарифмов, что предъявляет высокие требования к системе компьютерной математики, в частности, требует применения весьма затратных процедур. Рассмотренные примеры, однако, показывают, что во многих важных для практики случаях это произведение упрощается к константе с числовым значением, так что эти трудности отпадают.

Программная реализация слияния по этому признаку не представляет особого труда, а вывод формулы (18) указывает на то, как это сделать.[1] Сначала вычисляется произведение аргументов, которое подвергается, вообще говоря, расширенному упрощению. Ес-

[1] Все сказанное здесь, конечно, относится и к слиянию степенных функций.

ли удается определить квадрант, которому принадлежит это произведение, то можно перейти к следующим шагам. Пусть речь идет о суммах в качестве аргументов логарифмов. Тогда выделяем те слагаемые в одной из сумм, которые принадлежат правой полуплоскости ($\sqrt{1-z^2}$ в нашем примере (19)), а для остальных (iz) подбираем во второй сумме подобные (т.е. отличающиеся одним и тем же множителем) слагаемые (z в нашем примере). Если этот множитель ($-i$) удовлетворяет условиям признака 6, то умножаем на него соответствующую сумму так, чтобы уничтожились подобные слагаемые, складываем и проверяем, что эта сумма принадлежит правой полуплоскости.[1]

Простое сравнение пар формул (3), (6) и (4), (7) показывает, что имеют место равенства (ср. (13)):

$$\operatorname{arctg}(iz) = i \cdot \operatorname{arth}(z),\ \operatorname{arth}(iz) = i \cdot \operatorname{arctg}(z), \tag{20}$$

$$\arcsin(iz) = i \operatorname{arsh}(z),\ \operatorname{arsh}(iz) = i \cdot \arcsin(z). \tag{21}$$

Преобразования «слева направо» по равенствам (14) – (16), (20) и (21) должны включаться в автоматическое упрощение ОТиГФ. Что касается равенства (17), то его следует, видимо, включать в этот набор, несмотря на то, что появление слагаемого π в сумме может блокировать некоторые другие слияния логарифмических функций. Однако в большинстве случаев это несущественно. Например, сумма $\arcsin(-z) + \arccos(-z)$ после автоматического упрощения будет преобразована в сумму $-\arcsin(z) + \pi - \arccos(z)$, а в процессе расширенного упрощения (после перехода к логарифмическим представлениям) произойдет слияние (18) с окончательным результатом $\pi/2$.

Заканчивая разговор об автоматическом упрощении, дадим одну рекомендацию. Если аргумент ОТиГФ – символьная сумма, то встает вопрос, как трактовать формулы (20) и (21). Разумным оказался следующий набор непротиворечивых правил:
если ни одно из слагаемых (хотя бы и комплексных) не содержит *явно* мнимого числового множителя, то, конечно, никакого преобразования не производится;
если аргумент-сумма обратной гиперболической функции содержит хотя бы одно слагаемое с мнимым числовым множителем, то эта функция всегда преобразовывается в обратную тригонометрическую функцию;
обратная тригонометрическая функция преобразуется в гиперболическую, только если все слагаемые ее аргумента содержат числовой мнимый множитель.

Прямые функции, аргументы которых содержат ОТиГФ.

Эта ситуация одна из самых простых благодаря тому, что всегда [2]

$$e^{r\cdot\ln(z)} = z^r.$$

Поэтому, как легко проверяется, формулы (3) – (6) действительно определяют *обратные функции:* $\sin\big(\arcsin(z)\big) = z,\ \operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(z)) = z, \cos(\arccos(z)) = z$ и т.д. Соответствую-

[1] При использовании признаков 6в, 6г нужно, конечно дополнительно умножить суммы на i или $-i$.
[2] Заметим, что это просто определение степенной функции.

щие упрощения получаются подстановкой логарифмических представлений ОТиГФ в экспоненциальную запись тригонометрических и гиперболических функций. При этом часто достаточно при необходимости избавиться от знаменателей, содержащих квадратные корни, а не прибегать к полному расширенному упрощению.[1] Например, при вычислении $\cos(\arccos(z))$ указанная подстановка приводит к выражению (см. (5))

$$\left(z+i\sqrt{1-z^2}\right)+\left(z+i\sqrt{1-z^2}\right)^{-1}=2z,$$

поскольку $\left(z+i\sqrt{1-z^2}\right)^{-1}=z-i\sqrt{1-z^2}$. Также легко упрощаются выражения с более сложными комбинациями ОТиГФ, как в аргументах прямых функций, так и в суммах, произведениях и т.п. Например,[2]

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(z)/2)+i\operatorname{tg}(\arcsin(iz)\,/2)=0.$$

ОТиГФ с прямыми функциями в качестве аргументов.

Мы оставим в стороне случаи, когда аргументы ОТиГФ упрощаются сами по себе, поскольку это, так или иначе, всегда происходит в начале расширенного упрощения, когда упрощаются подвыражения данного выражения (см. гл. 10 книги [2]).

ОТиГФ даже с соответствующими им прямыми функциями в качестве аргументов на комплексной плоскости практически вообще не упрощаются, а при действительных аргументах упрощаются в весьма редких случаях. Например, равенство $\arcsin(\sin(z))=z$, справедливо, если $-\pi/2\le Re(z)\le\pi/2$ и $Im(z)\le 0$. Понятно, что программно проверить такие соотношения можно только в очень редких случаях. Для действительных аргументов формулы $\arcsin(\sin(x))=x$ и $\arccos(\cos(x))=x$ верны, если x принадлежит естественной области значений обратной тригонометрической функции, например,

$$\arcsin(\sin(\arg(z)/2))=\arg(z)/2.$$

$$\arccos(\cos(\arg(z)/2+\pi/2))=\arg(z)/2+\pi/2.$$

То же справедливо и для других ОТиГФ, в частности, для обратных гиперболических функций действительного аргумента имеем

$$\operatorname{arth}\big(\operatorname{th}(x)\big)=x, \operatorname{arsh}\big(\operatorname{sh}(x)\big)=x, \operatorname{arch}\big(\operatorname{ch}(x)\big)=|x|.$$

Все упрощения, соответствующие этим формулам получаются переходом к логарифмическим представлениям ОТиГФ и, вообще говоря, расширенным упрощением получающихся при этом аргументов логарифмических функций. Если в результате удается получить выражение вида $\ln(\exp(x+iy))$, причем величина y оказывается приведенной [3], то упрощение достигнуто.

Для дальнейшего нам необходимо рассмотреть

---

[1] Вообще говоря, сами преобразования к экспоненциальным и логарифмическим преобразованиям происходят внутри расширенного упрощения выражения, охватывающего эти функции.

[2] См. файл /Additions2/InverseTrigoHyper/TrigoOfArc.mtp. Многие другие примеры можно найти в файле Examples/3/Inverse_direct.mtp.

восстановление ОТиГФ по их логарифмическим представлениям.

Выше мы рассмотрели упрощение выражений, содержащих ОТиГФ, выполняемое с помощью перехода к их логарифмическим представлениям (см., например, Examples/3/Inverse_direct.mtp). Обратный переход часто не приводит к фактическому упрощению, а именно тогда, когда ОТиГФ вычисляются опять же с помощью их логарифмических представлений (непосредственно или через действительные и мнимые части), но даже в этих случаях может улучшать эстетическое восприятие формул. Прежде всего, это касается ситуаций, когда комплексные логарифмические выражения превращаются в чисто действительные.

Рассмотрим в связи с этим один пример.[1] При вычислении неопределенных интегралов от рациональных функций разложением на простейшие дроби к этим последним относят выражения вида $(x^2+a^2)^{-1}$ и применяют «табличный интеграл»[2]

$$\int (x^2+a^2)^{-1}dx = (1/a)\cdot \operatorname{arctg}(x/a). \qquad (22)$$

Однако при программировании вычисления неопределенных интегралов гораздо удобнее сводить такие подынтегральные функции к линейным по x знаменателям:

$$(x^2+a^2)^{-1} = ((x-ia)^{-1}-(x+ia)^{-1})/(2ia)$$

и использовать формулу

$$\int z^{-1}dz = \ln(\pm z),$$

выбирая знак перед выражением z так, чтобы обеспечить максимальное упрощение.

Заметим, что обычно пишут $\int x^{-1}dx = \ln(|x|)$, чтобы избежать отрицательных аргументов. Вообще, $\ln(z)$ и $\ln(-z)$ отличаются на константу $\pm i\pi$ (см. (28) из [3]). Итак,

$$\int (x^2+a^2)^{-1}dx = (\ln(ia-x)-\ln(x+ia))/(2ia) \qquad (23)$$

Правые части (22) и (23) равны, но, конечно, выражение (22) более привычно и выглядит гораздо симпатичнее.

В этом примере при преобразовании правой части (23) к правой части (22) можно допускать большие вольности, так как годятся любые выражения, отличающиеся на константу. В других случаях нужно строго придерживаться правил работы с комплексными логарифмами [3]. При этом оказывается, что преобразования к обратным тригонометрическим и гиперболическим функциям содержат подводные камни.

Восстановление тригонометрических и гиперболических арктангенсов

Прежде чем получить преобразование, обратное к (3), необходимо слить логарифмы вместе. Как показано в гл.3 книги [2], это возможно, если

1) переменная z не принадлежит разрезу по положительной мнимой полуоси от $+i$ до $+i\infty$, тогда $\operatorname{arctg}(z) = \frac{i}{2}(\ln\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right));$

[1] См. файл /Additions/Intgrl.mtp. Кроме того, в файле /Additions2//InverseTrigoHyper/Brewster приведен пример упрощения выражений, используемых в оптике.

[2] Для краткости мы не будем в правых частях формул для неопределенных интегралов писать «$+const$.

2) переменная z не принадлежит разрезу по отрицательной мнимой полуоси от $-i\infty$ до $-i$, тогда $\operatorname{arctg}(z) = \frac{1}{2i}\left(\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right)$.

Если переменная $z = x$ действительна, то любое из приведенных условий, очевидно, выполнено. Мы ограничимся обсуждением первого случая.[1] Для действительных значений аргумента $z = x$ программно возможность слияния устанавливается по признаку 3 из [3], а в комплексном случае признак 7б сразу показывает, что слияние возможно, если $Re(z) \neq 0$, поэтому необходимо разрешение игнорировать ошибку на линиях разреза.[2]

Положим теперь $u = \frac{1-iz}{1+iz}$, так что $z = \frac{-i(1-u)}{1+u}$ и

$$\ln(u) = 2i \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{i(1-u)}{1+u}\right),$$

причем условие 1) приводит к требованию, чтобы значение u не было действительным и меньшим -1.

Используя равенства (20), получаем

$$\ln(u) = 2 \cdot \operatorname{arth}\left(\frac{u-1}{u+1}\right),$$

а на величину u накладывается то же ограничение. При слиянии логарифмов для гиперболического арктангенса предпочтительнее преобразование

$$\operatorname{arth}(z) = \frac{1}{2}(\ln(1+z) - \ln(1-z)) \to -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right),$$

поскольку при этом некорректный результат оказывается в отрицательной части действительной оси (на линии разреза $z = x < -1$).

В процессе упрощений необходимо сделать лишь одно преобразование – к тригонометрическому или гиперболическому арктангенсу, а затем выбрать из них наилучший вариант. Впрочем, такой выбор произойдет автоматически при нормализации выражения, поскольку, как уже говорилось, преобразование (20) разумно включить в процедуру автоматического упрощения.

Восстановление геометрических и гиперболических арксинусов

Логарифмическое определение тригонометрического арксинуса дается формулой (4). Если положить

$$u = \sqrt{1-z^2} + iz, \tag{24}$$

то обычным способом (возведением в квадрат) можно получить выражение для аргумента

$$z = \frac{i(1-u^2)}{2u} \tag{25}$$

и, предположительно,

$$\ln(u) = i \cdot \arcsin\left(\frac{i(1-u^2)}{2u}\right). \tag{26}$$

[1] См. файл /Additions/LnToArT.mtp.

[2] Поэтому преобразования логарифмов к обратным тригонометрическим и функциям в ПифМате во многих случаях разрешены только под опцией $si+, разрешающей игнорирование ошибок на линиях разреза.

Однако из-за возведения в квадрат полученный корень надо проверить. Подставляя (25) в правую часть равенства (24),[1] получаем:

$$u = \frac{u^2(1+csgn((1+u^2)/u))-1+csgn((1+u^2)/u)}{2u}.$$

Ясно, что равенство справедливо, если

$$csgn((1+u^2)u^{-1}) = 1. \tag{27}$$

Пусть $u = x + iy$, так что $(1+u^2)u^{-1} = (x-iy)(x^2+y^2)^{-1} + x + iy$. Мы видим, что требуемое условие выполнено, если либо $x > 0$, либо $x = 0$ и $y - 1/y > 0$ (т.е. $y \geq 1$ или $-1 \leq y < 0$ [2]).

Таким образом, область, где справедливо равенство (26), совпадает с правой комплексной полуплоскостью $-\frac{\pi}{2} < \arg(u) \leq \pi/2$, в которой интервал мнимой оси $(0, i)$ заменен интервалом $(-i,0)$. Проверить такие условия программно вряд ли возможно,[3] но если пользователь разрешил игнорировать одномерные области на комплексной плоскости[4], то можно забыть про указанную замену, хотя проверять принадлежность u к правой комплексной плоскости необходимо, как показывает следующий пример. Возьмем функцию $\ln(u)$ с аргументом $u = -\sqrt{1-w^2} + iw$ и вычислим $\frac{i(1-u^2)}{2u} = w$. Полученное упрощение, однако, не означает, что получилось преобразование к арксинусу, поскольку выражение $-i \cdot \ln(u)$ его не представляет.

Проверка принадлежности сложного аргумента u правой полуплоскости чаще всего весьма затруднительна, обычно удается ее выполнить (и то лишь в некоторых случаях) только для действительной переменной $z = x$.

Другой подход к выяснению справедливости равенства (26) заключается в дополнительном вычислении и расширенном упрощении выражения аргумента сигнатуры (27). Поскольку выражение u может быть сложным, этот подход требует больше времени, однако, удивительным образом, часто упрощенное соотношение оказывается легко анализируемым на предмет принадлежности к правой комплексной полуплоскости. Кроме того, отпадают все сложности с интервалами на мнимой оси, описанные выше.

В силу равенств (20) преобразование к гиперболическому арксинусу дается формулой

$$\ln(u) = \operatorname{arsh}(\frac{u^2-1}{2u})$$

с теми же ограничениями на область значений выражения u.

Как и для арктангенсов, достаточно выполнить одно преобразование, а затем выбрать тригонометрический или гиперболический арксинус.

---

[1] Например, с помощью ПифМата, см. файл /Additions/LnToArS.mtp. О комплексной сигнатуре $\operatorname{csgn}(z)$ см. Дополнение в [3] и Дополнение 2 этой работы.

[2] Допустимость равенств $y = 1$ и $y = -1$ можно проверить непосредственно.

[3] В случае, когда значения арксинуса действительны, т.е. $z = x, |x| \leq 1$, про все эти сложности можно забыть.

[4] В ПифМате это опция $si+.

Восстановление геометрических и гиперболических арккосинусов

Логарифмическое представление тригонометрического арккосинуса дается формулой (5).

Ясно, что при действительных значениях z таких, что и арккосинус действителен (переменная z действительна, $z = x, |x| \leq 1$), аргумент логарифма u принадлежит верхней комплексной полуплоскости $Im(u) > 0$ с двумя точками на действительной оси ($z = \pm 1$).

Необходимая замена находится так же, как и выше, так что

$$\ln(u) = i \cdot \arccos((1 + u^2)/(2u)). \tag{28}$$

Подстановка найденной замены в логарифмическое представление приводит к следующему аргументу логарифма:[1]

$$z + i\sqrt{1 - z^2} = (1 + u^2 + (u^2 - 1) \cdot csgn(i \cdot (u^{-1} - u)/u).$$

Простой анализ аргумента сигнатуры

$$csgn(i(u^{-1} - u)/u) \tag{29}$$

показывает, что она обращается в единицу, если мнимая часть u положительна ($y = Im(u) > 0$) или равна нулю ($y = 0$), но тогда действительная часть ($x = Re(u)$) должна удовлетворять условию $x^{-1} - x \geq 0$, т.е. $0 < x \leq 1$ или $x \leq -1$. [2] В этих случаях справедливо преобразование (28).

В условиях программного анализа можно надеяться только на проверку условия $Im(u) > 0$ или на проверку действительности аргумента и значения получающегося арккосинуса (что, конечно, сужает область применимости (29)).[3]

Другой способ программно проверить корректность преобразования (28) аналогичен рассмотренному выше при восстановлении арксинуса: можно вычислить и упростить аргумент сигнатуры (29). Он требует только определения принадлежности упрощенного выражения к правой комплексной полуплоскости и часто оказывается очень эффективным. Заметим еще, что сравнение формул (26) и (29), а также (27) и (28) показывает, что выражения, полученные при попытке восстановить арксинус, могут быть использованы при восстановлении арккосинуса (и наоборот), поэтому излишние вычисления оказываются минимальными.

Обратимся теперь к гиперболическому арккосинусу (8):

$$\operatorname{arch}(z) = \ln(z + \sqrt{(z-1)} \cdot \sqrt{(z+1)}).$$

Естественная область определения этой функции – действительные величины $z \geq 1$, и только при таких аргументах ее значения вещественны. Замена переменной – такая же, как для тригонометрического арккосинуса. При этом

---

[1] При подстановке используется преобразование (К 3.14) $\sqrt{-z^2} = \sqrt{(iz)^2} = iz \cdot csgn(iz)$.

[2] Равенство в последних неравенствах соответствует выбору сигнатуры $csgn_+(0) = 1$.

[3] Под опцией $si+ ПифМат использует не совсем корректное условие $Im(u) \geq 0$, поскольку вероятность ошибки при достижении существенного упрощения выражения кажется весьма малой.

$$\ln(u) = \operatorname{arch}((1+u^2)/(2u)). \tag{30}$$

Контрольная подстановка приводит к аргументу логарифма вида

$$(u^2+1+(u^2-1)\cdot csgn(u^{1/2}+u^{-1/2})\cdot csgn(u^{1/2}-u^{-1/2}))/(2u). \tag{31}$$

Преобразование (30) верно, если произведение сигнатур равно единице. Обозначим $x = Re(u)$ и $y = Im(u)$, так что $u = x + iy$.

Первая из сигнатур, очевидно, равна единице (ведь главная ветвь квадратного корня лежит в правой полуплоскости), если только *не* выполняются условия $y = 0$ и $-1 \le x \le 0$. Если же эти условия выполняются, то вторая сигнатура равна единице, так что произведение сигнатур есть минус единица. Вне этой области значение произведения сигнатур определяется значением второй сигнатуры, а именно, это произведение равно единице, если $|u| > 1$ или $|u| = 1$, но при этом $y \ge 0$. Поскольку проверка этих условий для сложных выражений весьма проблематична, преобразование (30) на комплексной плоскости использовать сложно.[1] Однако из формулы (30) видно, что естественной области определения соответствуют действительные

$$u \ge 1. \tag{32}$$

Для таких значений обе сигнатуры в (31), конечно равны единице, так что неравенство (32) вполне может быть использовано для преобразования (30). Однако когда возможен переход гиперболическому арккосинусу по этим соображениям, то возможен переход и к гиперболическому арксинусу (см. (27)), так что эти результаты необходимо сравнивать. Поскольку предполагаемый аргумент арксинуса оказывается все равно вычисленным, то лучше проверять его знак вместо непосредственной проверки неравенства (32).

Понятно, что любое из рассмотренных преобразований восстановления имеет смысл использовать, только если оно приводит к реальному упрощению.[2]

Все описанные восстановления ОТиГФ обычно приводят к длительным вычислениям (как это часто бывает и при использовании других алгоритмов компьютерной алгебры) именно в тех случаях, когда положительный результат не может быть получен. Поэтому желательно предусмотреть принудительные прерывания расширенных упрощений, вызываемых из процедур восстановления, либо по таймеру, либо по сложности промежуточных результатов.

Последовательность ОТиГФ → логарифмическое представление → восстановление ОТиГФ значительно расширяет возможности упрощения выражений. Здесь есть две основные возможности. Рассмотрим сначала первую из них, когда в результате этой последовательности вновь получается ОТиГФ, но с более простым аргументом.

[1] ПифМате такие преобразования не поддерживает.

[2] Многочисленные примеры восстановления ОТиГФ от прямых функций см. в /Additions2/InverseTrigoHyper/ArcOfTrigo и /Additions2/InverseTrigoHyper/ArcOfHyper.

Известное тождество $\sin^2(z)+\cos^2(z)=1$ позволяет ожидать, что могут выполняться равенства[1]

$$\arcsin\left(\sqrt{1-z^2}\right)=\arccos(z) \text{ и} \quad (33)$$

$$\arccos\left(\sqrt{1-z^2}\right)=\arcsin(z). \quad (34)$$

Рассмотрим первое из них. Логарифмическое представление его левой части есть

$$\arcsin\left(\sqrt{1-z^2}\right)=-i\cdot\ln(\sqrt{z^2}+i\sqrt{1-z^2}).$$

Сравнивая с формулой (5), видим, что равенство (33) верно, если $\sqrt{z^2}=z$, т.е. если выражение z принадлежит правой комплексной полуплоскости ($csgn(z)=1$, см. (24) из [3]). При этом же условии справедливо равенство (34). Это равенство может быть записано в форме, справедливой на всей комплексной плоскости. В самом деле, восстановление арксинуса приводит к выражению $\arcsin\big(z\cdot csgn(z)\big)=\arcsin(z)\cdot csgn(z)$ (см. (Д9)), поэтому [2]

$$\arccos\left(\sqrt{1-z^2}\right)=\arcsin(z)\cdot csgn(z).$$

Если речь идет об эквивалентности нулю разности левых и правых частей равенств (33) и (34) при указанном условии, то она устанавливается уже на этапе преобразования к логарифмическим представлениям, но упрощение левых частей (33) и (34) достигается лишь после восстановления ОТиГФ.

Тождество $\operatorname{ch}^2(z)-\operatorname{sh}^2(z)=1$ имеет аналогами следующие формулы:

$$\operatorname{arsh}(\sqrt{-1+z^2}=\operatorname{arch}(z)\,,\ \pi/2<\arg(z)\le\pi/2, \quad (35)$$

$$\operatorname{arch}\left(\sqrt{1+z^2}\right)=\operatorname{arsh}(z)\cdot csgn(z). \quad (36)$$

В рассмотренных случаях достаточно было автоматического упрощения после перехода к логарифмическим представлениям. Следующий пример несколько сложнее. Рассмотрим равенство [3]

$$\operatorname{arctg}(x(1-x^2)^{-1/2})=\arcsin(x), \quad (37)$$

используемое для вычисления арксинуса без использования логарифмических представлений в тех случаях, когда процессор вычисляет только арктангенс. Это равенство верно и для комплексных аргументов за исключением линий разреза арксинуса, однако установить этот факт с помощью признаков из [3] невозможно, поэтому мы ограничимся естественной областью $|x|\le 1$.[4] Логарифмическое представление левой части (37) имеет вид (3):

$$(i/2)(\ln((-ix+A)\,A^{-1})-(\ln((+ix+A)\,A^{-1})),$$

где

---

[1] Следующие примеры см. в /Additions2/InverseTrigoHyper/ArcSin_ArcCos.

[2] Здесь удобно считать, что $csgn(0)=1$ (см. функцию $csgn_+(z)$ в Дополнении), чтобы можно было перебросить сигнатуру из одной части равенства в другую.

[3] См. следующие примеры в /Additions2/InverseTrigoHyper/ArcSin_ArcTg.

[4] В ПифМате при установке опции $cx— (два минуса или $cx=) все подкоренные выражения считаются положительными, что и гарантирует выполнение этого условия.

$A = \sqrt{1 - x^2}$.

Поскольку $A \geq 0$, то возможно раскрытие логарифмов по признаку 1 из [3], убирающее $\ln(A^{-1})$, а оставшиеся логарифмы сливаются по признаку 3:[1]

$$\ln(-ix + A) - \ln(+ix + A) = \ln((A - ix)^2) = 2\ln(A - ix) = -2\ln(A + ix).$$

В конце мы использовали равенство, полученное при выводе формулы (15). Отметим, что после слияния упрощение достигается освобождением знаменателя от комплексного выражения, вообще же говоря, необходимо расширенное упрощение.

Упрощения по равенствам

$$\arcsin(x(1 + x^2)^{-1/2}) = \mathrm{arctg}(x)$$

и

$$\arccos((1 + x^2)^{-1/2}) = \mathrm{arctg}(x), x \geq 0,$$

выполняются тем же методом.

Рассматриваемая последовательность «ОТиГФ → логарифмическое представление → восстановление ОТиГФ» эффективна также для упрощения выражений, содержащих несколько ОТиГФ. Сначала рассмотрим простой пример, показывающий, в частности, что необходимо производить полное раскрытие логарифмических функции с использованием признаков из работы [3]:

$$\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arctg}(1/x) = (\pi/2) \cdot sgn_+(x).^2 \qquad (38)$$

Согласно формуле (3) имеем $\mathrm{arctg}(x) = (i/2)(\ln(1 - ix) - \ln(1 + x))$, и $\mathrm{arctg}(1/x) = (i/2)(\ln(1 - i/x) - \ln(1 + i/x))$. Логарифмы второй формулы надо дополнительно раскрыть, причем так, чтобы можно было воспользоваться признаком (3) из [3]:

$$\ln(1 - i/x) = \ln\big((x - i)/x\big) = \ln\big((1 + ix)/(ix)\big) = \ln(1 + ix) - \ln(ix)).$$

Аналогично,

$$\ln(1 + i/x) = \ln\big((x + i)/x\big) = \ln\big((1 - ix)/(-ix)\big) = \ln(1 - ix) - \ln(-ix)).$$

При сложении в левой части (38) остаются только два логарифма, для которых применяем признак 8 (см. (28) в [3]):

$$(i/2)(\ln(-ix) - \ln(ix)) = (\pi/2)sgn_+(x).$$

В заключение отследим преобразования для несколько более сложного случая:[3]

$$i(\mathrm{arth}\left(\big(1 - 2i\sin(x)\big)\big(3 - 2i\sin(x)\big)^{-1}\right) - \mathrm{arth}\left(\big(1 + 2i\sin(x)\big)\big(3 + 2i\sin(x)\big)^{-1}\right)) = \mathrm{arctg}(\sin(x)). \qquad (39)$$

Логарифмические представления гиперболических арктангенсов $\frac{1}{2}\ln(2\big(1 - i\sin(x)\big))$ и $\frac{1}{2}\ln(2\big(1 + i\sin(x)\big))$, получаются, как и в предыдущем примере, предварительным пол-

---

[1] Сразу слить логарифмы программно не удается. Трудности возникают и при раскрытии скобок.

[2] Эта формула, по-видимому, верна и при комплексных аргументах за исключением сегмента $[-i, +i]$ на мнимой оси, не совпадающего с линиями разреза тригонометрического тангенса.

[3] См. файл /Additions2/InverseTrigoHyper/SimplifyByLns

ным раскрытием логарифмов (6). Эти представления сливаются по признаку 3 из [3], а восстановление ОТиГФ приводит к равенству (39).

Дополнение 1. Точки ветвления и линии разреза ОТиГФ.

Арктангенс тригонометрический и арксинус гиперболический имеют точки ветвления $z = \pm i$ и два разреза по мнимой оси: от $-i\infty$ до $-i$ и от $+i$ до $+i\infty$.

Точки ветвления тригонометрических арксинуса и арккосинуса, а также гиперболического арктангенса суть $z = \pm 1$, линии разреза идут вдоль действительной оси от минус бесконечности до минус единицы и от плюс единицы до плюс бесконечности.

Все выше перечисленные функции непрерывны на линиях разреза «против часовой стрелки» с центром в нуле.

Линия разреза гиперболического арккосинуса проходит по действительной оси от $-\infty$ до $+\ 1$. Точка ветвления $z = +1$ входит в область определения, и ее обычно относят к линии разреза, хотя арккосинус гиперболический полностью непрерывен в этой точке. Вообще, вопрос о том, в каких случаях точку ветвления можно относить к линии разреза, подробно обсужден в гл. 5 книги [2]. Гиперболический арккосинус также непрерывен на линии разреза «против часовой стрелки», но с центром в точке $z = 1$.

Дополнение 2. Сигнатуры ОТиГФ.[1]

В то время как комплексные сигнатуры прямых тригонометрических и гиперболических функций, вообще говоря, не упрощаются,[2] для обратных функций справедливы следующие формулы (если можно игнорировать значение при $z = 0$).

$$\operatorname{csgn}(\operatorname{arctg}(z)) = \operatorname{csgn}(z), \qquad (Д1)$$

$$\operatorname{csgn}(\operatorname{arth}(z)) = \operatorname{csgn}(z), \qquad (Д2)$$

$$\operatorname{csgn}(\arcsin(z)) = \operatorname{csgn}(z), \qquad (Д3)$$

$$\operatorname{csgn}(\operatorname{arsh}(z)) = \operatorname{csgn}(z), \qquad (Д4)$$

$$\operatorname{csgn}(\arccos(z)) = 1,\ ^{3} \qquad (Д5)$$

$$\operatorname{csgn}(\operatorname{arch}(z))=1.\ ^{4} \qquad (Д6)$$

Обратимся к соотношению (Д1). Формулу (гл. 3 книги [2]) для действительной части арктангенса можно записать в виде

$$Re(\operatorname{arctg}(z)) = \frac{1}{2}((1 + ix - y)_{arg} - (1 - ix + y)_{arg}), \qquad (Д7)$$

где x и y – действительная и мнимая части комплексного выражения z.

---

[1] О сигнатурах комплексного переменного см. Дополнение к [3]. Примеры в файле /Additions2/Sgns etc/CsgnOfArc.

[2] Исключение составляет гиперболический тангенс. Если $z = x + iy$ (x и y действительные величины) и $x \neq 0$, то $\operatorname{csgn}(\operatorname{th}(x + iy)) = \operatorname{sgn}(x)$.

[3] Заметим, что $\arccos(1) = 0$. Это единственная такая точка, и выставленная по умолчанию опция $Pm+ в ПифМате позволяет ее игнорировать.

[4] Имея в виду, что arch(1)=0, см. предыдущую сноску.

Ясно, что если $x \neq 0$, то знак действительной части арктангенса совпадает со знаком x. Если же $x = 0$, то при $|y| > 1$ действительная часть (Д7) равна $\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(y)$. Наконец, при $x = 0$ и $|y| \leq 1$ удобно свести тригонометрический арктангенс к гиперболическому, используя (20).

Поскольку арктангенс гиперболический в области $|y| \leq 1$ действителен, то арктангенс тригонометрический не имеет действительной части, а его мнимая часть с учетом равенства $x = 0$ дается выражением (формула 3.40 книги [2]):

$$Im\left(\operatorname{arctg}(z)\right) = \frac{1}{4}\ln((1+y)^2(1-y)^{-2}),$$

так что ее знак совпадает со знаком y. Тем самым соотношение (Д1) доказано. Равенство (Д2) можно доказать аналогичными рассуждениями или используя формулу (20) и формулу (35) из [3].

Формула (3.46 из [2])

$$\arcsin_{Re}(x+iy) = \arcsin\left(2x\left(p(x,y)+q(x,y)\right)^{-1}\right),$$

где

$$p(x,y) = \sqrt{(1+x)^2+y^2},\ q(x,y) = \sqrt{(1-x)^2+y^2},$$

показывает, что знак при $x \neq 0$ знак действительной части арксинуса совпадает со знаком x. Она обращается в ноль только при $x = 0$. Если при этом перейти к гиперболическому арксинусу (21), то сразу становится ясно, что знаки мнимых частей арксинуса и его аргумента совпадают, что и доказывает формулу (Д3).

Формула (Д4) тоже сразу следует из (3.49) книги [2]. Также легко доказываются соотношения (Д5) и (Д6) (с учетом сносок).

Преобразования (Д1) – (Д4) допускают некоторую модификацию. Используя (20), имеем например,

$$\operatorname{csgn}\left(i \cdot \operatorname{arctg}(z)\right) = \operatorname{csgn}\left(\operatorname{arth}(iz)\right) = \operatorname{csgn}(iz).$$

Аналогично,

$$\operatorname{csgn}\left(i \cdot \operatorname{arth}(z)\right) = \operatorname{csgn}(i \cdot z), \qquad (Д8)$$

$$\operatorname{csgn}\left(i \cdot \arcsin(z)\right) = \operatorname{csgn}(i \cdot z),$$

$$\operatorname{csgn}\left(i \cdot \operatorname{arsh}(z)\right) = \operatorname{csgn}(i \cdot z).$$

Вместо мнимой единицы может стоять, конечно, любое чисто мнимое выражение с постоянным знаком,[1] например, мнимое число.

В силу нечетности функций (см. (14) – (16)) arcsin, arctg, $\operatorname{arsh}(z)$ и $\operatorname{arth}(z)$ имеют место формулы

$$\arcsin\left(z \cdot csgn(z)\right) = \arcsin(z) \cdot csgn(z),\ \operatorname{arctg}\left(z \cdot csgn(z)\right) = \operatorname{arctg}(z) \cdot csgn(z) \qquad (Д9)$$

и т.д.

---

[1] Часто разумно знаком мнимого выражения ix считать знак x. Если этот знак отрицателен, то в правой части, конечно, появится знак «минус».

Епифанов А.С. (род. 1947 г.) – доцент кафедры «Физики» МГТУ им. Н.Э. Баумана, кандидат физ.-мат. наук; области научных интересов: взаимодействие лазерного излучения с конденсированными средами, компьютерная математика (в том числе непосредственное программирование); e-mail: apifpk@gmail.com.

Никифоров Александр Михайлович (род. 1985г.) - доцент кафедры «Физики» МГТУ им. Н.Э. Баумана, кандидат физ.-мат. наук. Области научных интересов: квантовая теория поля, взаимодействие лазерного излучения с конденсированными средами, компьютерная математика; e-mail: nikahv@yandex.ru.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cohen Joel S. *Computer Algebra and Symbolic Computation. Elementary Algorithms. Natick, MA, A K Peters, 2002, 323 p.*

[2] Епифанов А.С. *Элементарные методы символьных вычислений.* Москва, Маска, 2012, 316 с. *URL: http://PifMath.ru/1.4.2.1/PifMath_Book.pdf (дата обращения 04.04.2015).*

[3] Епифанов А.С., Никифоров А.М. Раскрытие и слияние логарифмических и степенных функций при компьютерном упрощении символьных выражений.

[4] Corless R.M., Davenport J.H., Jeffry D.J., Watt S.M. According to Abramowitz and Stegun . SIGSAM Bulletin, 2000, № 34 (2), pp. 58 – 65.
URL: http://www.sigsam.org/bulletin/articles/132/paper12.pdf *(дата обращения 21.01.2015)*.

[5] Kahan W. Branch cuts for complex elementary functions. *The State of Art in Numerical Analysis, Oxford, Clarendon Press, 1987, pp. 165 – 211*.

[6] Bradford R., Corless R.M., Davenport J.H., Jeffry D.J., Watt S.M. Reasoning about the elementary functions of complex analysis. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2002, №36 (3), pp. 303 – 318.
URL: http://www.apmaths.uwo.ca/~djeffrey/Offprints/AMAI.pdf *(дата обращения 21.01.2015)*.

[7] Cohen Joel S. *Computer Algebra and Symbolic Computation. Mathematical Methods. Natick, MA, A K Peters, 2003, 448 p.*

The Computer Simplification of Symbolic Expressions with Inverse Trigonometric and Hyperbolic Functions

@A.S. Epifanov, A.M. Nikiforov

Logarithmic functions of complex symbolic variable transformations to inverse trigonometric and hyperbolic functions are analyzed. A method for the simplification of symbolic expressions based on logarithmic representations of inverse trigonometric and hyperbolic functions, evaluations of logarithmic expression and backward transformation to inverse trigonometric or hyperbolic functions is presented. Examples for the method are available at http://PifMath.ru.

Key words: *computer mathematics, complex logarithm, inverse trigonometric functions, inverse hyperbolic functions, mathematical simplification, simplifying expressions.*

Epifanov A.S. (b. 1947) - Assoc. Professor of the Physics Department at Bauman Moscow State Technical University, Ph.D. Main scientific interests: Laser beam interaction with solids, computer mathematics (including programming itself); e-mail: apifpk@gmail.com

Nikiforov A.M. (b. 1985) - Assoc. Professor of the Physics Department at Bauman Moscow State Technical University, Ph.D. Main scientific interests: quantum field theory, laser beam interaction with solids, computer mathematics; e-mail: nikahv@yandex.ru.